Université Clermont Auvergne Année 2021-2022
UFR de Mathématiques

U.E. DE MATHÉMATIQUES S2

Examen intermédiaire du mardi 22 mars 2022

La durée de l'épreuve est de 1 heure 30.
Ce sujet comporte 1 page.
Les documents, calculatrices, téléphones et autres matériels électroniques sont interdits.
Il sera tenu compte de la rédaction dans l'évaluation, en particulier **toute réponse devra être justifiée avec soin** (aucun point ne sera donné à une réponse juste non justifiée).
Barême prévisionnel (pouvant être modifié) : Questions de cours 20%, Ex. 1 30%, Ex. 2 50%

Questions de Cours.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Énoncer la formule de Taylor-Young à l'ordre n en zéro pour une fonction f définie et n fois dérivable au voisinage de zéro.
2. Donner le développement limité à l'ordre 5 en 0 de $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
3. Soit E un espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Démontrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 1 :

1. Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{(1+x)}$.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de f.
3. En déduire les valeurs de $f'(0)$, $f''(0)$ et $f'''(0)$.
4. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de $g(x) = \cos(2x) - 1$.
5. En déduire $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(-x) + \sin(x)}{\cos(2x) - 1}$.

Exercice 2 :

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ $\quad u_1 = (1, -1, 0), \quad u_2 = (0, 1, 1) \quad$ et $\quad u_3 = (2, 1, 3)$ et les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, u_3), \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}.$$

1. Justifier que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Démontrer que G est de dimension 2 et en donner une base (v_1, v_2).
3. Montrer que (u_1, u_2) est une base de F.
4. Montrer que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$.
5. La famille (u_1, u_2, v_1, v_2) est-elle libre ?
6. Déterminer une famille génératrice de $F + G$, puis déterminer sa dimension.
7. En déduire la dimension de $F \cap G$ et en donner une base.
8. Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?
9. Déterminer un sous-espace vectoriel supplémentaire H de F dans $\mathbb{R}^3$.
10. Déterminer $u_F \in F$ et $u_H \in H$ tels que $u = (1, 1, 1) = u_F + u_H$. Cette écriture est-elle unique ?

Correction de l'examen intermédiaire

Mathématiques S2 - 22 mars 2022

V. Souveton

Questions de cours

1. $f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$, au voisinage de 0.

2. C'est un DL usuel : $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + o(x^5)$, au voisinage de 0.

3. D'abord, on a bien $F \cap G \subset E$.

   — $0_E \in F$ et $0_E \in G$ car F et G sont des sev de E. Donc $0_E \in F \cap G$.

   — Soient $x, y \in F \cap G$. Comme $x, y \in F$ et que F est un sev de E, donc stable par addition, alors $x + y \in F$. De même, comme $x, y \in G$ et que G est un sev de E, donc stable par addition, alors $x + y \in G$. En conclusion, $x + y \in F \cap G$. Donc $F \cap G$ est stable par addition.

   — Soient $x \in F \cap G$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Comme $x \in F$ et que F est un sev de E, donc stable par produit externe, alors $\lambda \cdot x \in F$. De même, comme $x \in G$ et que G est un sev de E, donc stable par produit externe, alors $\lambda \cdot x \in G$. En conclusion, $\lambda \cdot x \in F \cap G$. Donc $F \cap G$ est stable par produit externe.

   On a montré que $F \cap G$ est un sev de E.

Exercice 1

1. La fonction f est définie pour $x + 1 > 0$ et $x + 1 \neq 0$, i.e. pour $x + 1 > 0$. Donc $\mathcal{D}_f =]-1, +\infty[$.

2. f est le produit de $\ln(1 + x)$ par $\frac{1}{1+x}$. Commençons par former le $DL_3(0)$ de $\ln(1 + x)$, qui est usuel :

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \text{ quand } x \to 0.$$

   Puis, formons le $DL_3(0)$ de $1/(1 + x)$, lui aussi usuel :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3), \text{ quand } x \to 0.$$

   Pour obtenir la partie régulière du $DL_3(0)$ de f, il suffit de multiplier la partie régulière du $DL_3(0)$ de $\ln(1+x)$ avec celle du $DL_3(0)$ de $1/(1+x)$, en omettant les termes d'ordre strictement plus grand que 3. En conclusion,

$$f(x) = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 + o(x^3), \text{ quand } x \to 0.$$

3. La fonction f est 3 fois dérivable au voisinage de 0. On peut donc lui appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en 0 :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + x^2\frac{f''(0)}{2} + x^3\frac{f'''(0)}{6} + o(x^3), \text{ quand } x \to 0.$$

Par unicité du DL, on peut identifier les coefficients de ce DL avec ceux obtenus à la question précédente. Cela donne : $f'(0) = 1$, $f''(0) = -3$ et $f'''(0) = 11$.

4. C'est immédiat pour peu que l'on se souvienne du $DL_3(0)$ de la fonction cosinus, qui est usuel : $\cos(2x) - 1 = 1 - \dfrac{(2x)^2}{2} - 1 + o(x^3) = -2x^2 + o(x^3)$, quand $x \to 0$.

5. En se rappelant que $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ au voisinage de 0, on obtient $f(-x)+\sin(x) = -\dfrac{3x^2}{2} - 2x^3 + o(x^3)$ au voisinage de 0. Une fonction est équivalente en 0 au premier terme non nul de son $DL(0)$ (s'il existe). Ici, le numérateur est donc équivalent à $-\frac{3x^2}{2}$. De même, le dénominateur équivaut à $-2x^2$. Par quotient d'équivalent, on en déduit que $\dfrac{f(-x) + \sin(x)}{\cos(2x) - 1} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{3}{4}$, qui tend vers $\dfrac{3}{4}$ quand x tend vers 0. Donc la limite cherchée est $\dfrac{3}{4}$.

Exercice 2

1. On montre facilement que G contient $0_{\mathbf{R}^3}$ et est stable par addition et produit externe.

2. $(x, y, z) \in G \iff (x, y, z) = y \cdot (2, 1, 0) + z \cdot (-3, 0, 1)$. La famille de deux vecteurs $((2, 1, 0), (-3, 0, 1))$ est donc génératrice de G. Elle est clairement libre puisque les deux vecteurs qui la composent ne sont pas colinéaires. Donc c'est une base de G et $\dim G = 2$.

3. La famille (u_1, u_2, u_3) est génératrice de F, par définition du Vect. Or, $u_3 = 2u_1 + 3u_2$. Donc (u_1, u_2) est génératrice de F. Puisqu'elle est libre, les deux vecteurs qui la composent n'étant pas colinéaires, alors (u_1, u_2) est une base de F.

4. Appelons $K := \{(x, y, z) \in \mathbf{R} \mid x + y - z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R} \mid y = -x + z\}$.

   Alors, $(x, y, z) \in K \Longrightarrow (x, y, z) = x\cdot(1, -1, 0)+z\cdot(0, 1, 1) = x\cdot u_1 + y\cdot u_2 \Longrightarrow (x, y, z) \in \operatorname{Vect}(u_1, u_2) = F$. Ainsi, $K \subset F$.

   Aussi, $u_1, u_2 \in K$ (ils vérifient l'équation de F). Puisque K est un sev de $\mathbf{R}^3$, donc stable par CL, alors toute combinaison linéaire de u_1 et de u_2, i.e. tout vecteur de F, est aussi dans K. Ainsi, $F \subset K$.

   Par double inclusion, on a donc prouvé que $F = K$.

5. C'est une famille de 4 vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3, donc elle ne peut pas être libre. En particulier, $u_1 - 3u_2 + 4v_1 + 3v_2 = 0_{\mathbf{R}^3}$ donc v_2 est CL des trois autres vecteurs de la famille.

6. $F + G = \operatorname{Vect}(u_1, u_2) + \operatorname{Vect}(v_1, v_2) = \operatorname{Vect}(u_1, u_2, v_1, v_2) = \operatorname{Vect}(u_1, u_2, v_1)$. La famille (u_1, u_2, v_1) est donc génératrice de $F + G$. On vérifie aisément qu'elle est libre, ce qui en fait une base de $F + G$. Ainsi, $\dim(F + G) = 3$.

7. On applique la formule de Grassmann : $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$ et on trouve $\dim F \cap G = 1$. Il suffit donc de trouver un vecteur non nul appartenant à la fois à F et à G. Par exemple, le vecteur $(-1, 4, 3) \in F \cap G$. Donc $((-1, 4, 3))$ est une base de $F \cap G$.

8. $\dim F \cap G = 1$ donc $F \cap G \neq \{(0, 0, 0)\}$. Ainsi, F et G ne sont pas en somme directe, donc pas supplémentaires.

9. Pour cela, on commence par compléter la base (u_1, u_2) de F en une base de $\mathbf{R}^3$. Il manque un seul vecteur, que nous allons choisir parmi les vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Par exemple, la famille (u_1, u_2, e_2), avec $e_2 := (0, 1, 0)$, est libre et contient $3 = \dim \mathbf{R}^3$ vecteurs, donc c'est une base de $\mathbf{R}^3$. Un supplémentaire de F dans $\mathbf{R}^3$ est donc $H = \mathrm{Vect}\,(e_2)$.

10. $u = (u_1 + u_2) + e_2$, avec $(u_1 + u_2) \in F$ et $e_2 \in H$. Cette écriture est unique, les espaces F et H étant supplémentaires.

$\mathcal{FIN}$