Examen terminal du mardi 10 mai 2022

Durée : 2h - Documents et matériel électronique interdits.
Le sujet est composé de questions de cours et de 3 exercices indépendants.
qui peuvent être traités dans n'importe quel ordre.
Toute réponse doit être justifiée ou argumentée.
Barême indicatif (susceptible de modifications) : Questions de cours : 20%
Ex. 1 : 30-35%, Ex. 2 : 25-30%, Ex. 3 : 20%

Questions de cours

1. Écrire avec des quantificateurs la phrase mathématique suivante :
   « la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ converge vers -3 ».
2. Soit E et F des espaces vectoriels et $\varphi : E \to F$ une application linéaire.
   (a) Rappeler la définition de $\ker(\varphi)$.
   (b) Montrer que $\ker(\varphi)$ est un espace vectoriel.
3. Soit $h : \mathbb{R}_4[X] \to \mathbb{R}^4$ une application linéaire.
   (a) Donner (sans justification) $\dim(\mathbb{R}_4[X])$.
   (b) Énoncer le théorème du rang appliqué à h.
   (c) Montrer que h n'est pas injective.

Exercice 1. On considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (que l'on notera $\mathcal{C}$) est $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & 9 & 4 \\ 4 & -21 & -9 \end{pmatrix}$.

On note $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.
On note u_1, u_2 et u_3 les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dont les coordonnées dans la base canonique $\mathcal{C}$ sont respectivement $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base et la dimension de $\ker(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$. En déduire $f(u_1)$.
3. Calculer $f(u_2)$ et $f(u_3)$.
4. Déterminer la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}_1$.
5. Calculer le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. En déduire que f est bijective, et déterminer $\ker(f)$.
   On pose $g = f \circ f$ et $h = g \circ g$.
6. Calculer B^4. En déduire que $h = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.
7. Sans calcul, déterminer A^4 (en justifiant la réponse).

Exercice 2.
Soit $a \in \,]-2, 0[$. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{2} + 2u_n$.
Soit p et q les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = \dfrac{x^2}{2} + 2x$ et $q(x) = p(x) - x$.

1. Étudier les variations de p sur $\mathbb{R}$, et montrer que $p(]-2, 0[) = \,]-2, 0[$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 0$, on a $u_n \in \,]-2, 0[$.
3. Montrer que pour tout $x \in \,]-2, 0[$, on a $q(x) \leq 0$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est monotone.
4. Justifier que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente, et déterminer sa limite ℓ.

Exercice 3. On considère la fonction $F\colon \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = 2x\mathrm{e}^x + \ln(1 - 2x)$.

1. Déterminer le DL à l'ordre 3 en 0 de F.
2. On considère la suite $(v_n)_{n\geq 3}$ définie par $v_n = \frac{2}{n}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + \ln(1 - \frac{2}{n})$. À l'aide de la question précédente, déterminer un équivalent simple de v_n.
3. Montrer que la suite $(n^3 v_n)_{n\geq 3}$ est convergente, et déterminer sa limite.

Correction de l'examen terminal

Mathématiques S2 - 10 mai 2022

V. Souveton

Questions de cours

1. $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad (n \geq N \implies |w_n + 3| \leq \varepsilon)$
2. $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{x \in E \ ; \ \varphi(x) = 0\}$. On utilise la caractérisation usuelle pour montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un sev de E, ce qui montrera que c'est un espace vectoriel : $\varphi(0_E) = 0_F$ (car φ est linéaire) et pour tous $x, y \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on a $\varphi(x + \lambda y) = \varphi(x) + \lambda\varphi(y) = 0_F$.
3. $\dim \mathbf{R}_4[X] = 5$. Théorème du rang appliqué à h : $\dim \mathbf{R}_4[X] = \dim \mathrm{Ker}(h) + \dim \mathrm{Im}(h)$. Ici, on a $\dim \mathrm{Im}(h) \leq 4$ (car l'image de h est un sev de $\mathbf{R}^4$) donc $\dim \mathrm{Ker}(h) \geq 5 - 4 = 1$ donc $\mathrm{Ker}(h) \neq \{0\}$ et h n'est pas injective.

Exercice 1

1. La famille est libre et contient $3 = \dim \mathbf{R}^3$ vecteurs donc c'est une base de $\mathbf{R}^3$.
2. $(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f + id) \iff (A + I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x = 2z \end{array} \right.$

   On en déduit alors que $\mathrm{Ker}(f + id) = \{\begin{pmatrix} 2z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \ ; \ z \in \mathbf{R}\}$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(f + id)$ est de dimension 1 et une base est donnée par la famille contenant le seul vecteur $(2, 0, 1)$. Ainsi, le vecteur u_1 est dans $\mathrm{Ker}(f + id)$ donc $(f + id)(u_1) = f(u_1) + u_1 = 0 \iff f(u_1) = -u_1$.
3. $f(u_2) = u_3$ et $f(u_3) = -u_2$.
4. $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
5. En développant par rapport à la première colonne, on trouve $\det B = -1 \neq 0$. On en déduit que la famille $(f(u_1), f(u_2), f(u_3))$, qui est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$, est également libre. Ainsi, c'est une base de $\mathrm{Im}(f)$ qui est donc un sev de $\mathbf{R}^3$ de dimension 3, donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbf{R}^3$ et f est surjective. Le théorème du rang donne ensuite $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$ d'où $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ et f est injective. En conclusion, f est bien bijective.
6. La matrice de h dans la base (u_1, u_2, u_3) est celle de $f \circ f \circ f \circ f$, i.e. B^4. On montre par le calcul que $B^4 = I_3$, qui est la matrice de id dans la base (u_1, u_2, u_3). D'où $h = id$.
7. A^4 est la matrice de $f \circ f \circ f \circ f$, qui est l'identité d'après la question précédente, dans la base canonique. D'où $A^4 = I_3$.

Exercice 2

1. La courbe représentative de p est une parabole convexe s'annulant en -4 et 0. p est donc une application décroissante sur $]-\infty, -2]$ et croissante sur $]-2, +\infty[$, donc croissante sur $]-2, 0[$. $p(-2) = -2$ et $p(0) = 0$ donc $p(]-2, 0[) =]-2, 0[$.
2. **Initialisation :** $u_0 = a \in]-2, 0[$, d'après l'énoncé.

   Hérédité : On suppose que $u_n \in]-2, 0[$. Alors, $u_{n+1} = p(u_n) \in]-2, 0[$, puisque l'intervalle $]-2, 0[$ est stable par p.

   Conclusion : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \in]-2, 0[$.
3. La courbe représentative de q est une parabole convexe s'annulant en -2 et 0. p est donc une application négative sur $]-2, 0[$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = p(u_n) - u_n = q(u_n) \leq 0$, puisque tous les termes de la suite sont compris entre -2 et 0. Donc (u_n) est décroissante.
4. La suite est décroissante et minorée donc converge. Puisque p est continue, la limite est solution de l'équation $\ell = p(\ell) \iff \ell = 0$ ou $\ell = -2$. Puisque $u_0 < 0$ et que la suite est décroissante, alors $\ell = -2$.

Exercice 3

1. Au voisinage de 0,

$$\begin{aligned}F(x) &= 2x + 2x^2 + \frac{2x^3}{2} - 2x - \frac{4x^2}{2} - \frac{8x^3}{3} + o(x^3)\\ &= \frac{-5}{3}x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

2. Quand $n \to \infty$, alors $1/n \to 0$. Ici, $v_n = F(1/n) \sim \frac{-5}{3} \times \frac{1}{n^3}$ en $+\infty$.
3. D'après la question précédente, on a $n^3 v_n \sim n^3 \times \left(\frac{-5}{3} \times \frac{1}{n^3}\right) = \frac{-5}{3} \to \frac{-5}{3}$ quand $n \to \infty$. La limite cherchée est donc $-5/3$.