CC1 de Mathématiques S2

Groupe MI-e1 - 10 février 2023

V. Souveton

Exercice 1. Démontrer que :

(a) $x^3 = o(2x)$ au voisinage de 0 ;

(b) $\ln(1+x) \sim x$ au voisinage de 0 ;

(c) $x\sin(x) = o(x^2)$ au voisinage de $+\infty$;

(d) $x - \exp(-x) \sim x - 3$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 2. Pour tout $x \in \mathbf{R}\backslash\{1\}$, on pose $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{1-x}$.

1. (a) Donner les développements limités à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $\cos(x)$ et de $\dfrac{1}{1-x}$.

   (b) En déduire que le $\mathrm{DL}_3(0)$ de f s'écrit $f(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{2} + o(x^3)$.

2. (a) Rappeler la formule de Taylor-Young en 0 à l'ordre n pour une fonction g et les hypothèses nécessaires à son utilisation.

   (b) En déduire les valeurs de $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ et $f'''(0)$.

3. (a) Donner un équivalent simple de $h(x) = \dfrac{f(2x) - 1 - 2x}{\sin(3x)}$ au voisinage de 0.

   (b) En déduire $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$.

Correction des exercices

Correction de l'Exercice 1.

(a) Pour $x \neq 0$, on a :

$$\frac{x^3}{2x} = \frac{x^2}{2} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

Donc $x^3 = o(2x)$ au voisinage de 0.

(b) Posons $f(x) = \ln(1+x)$ pour $x \in]-1, +\infty[$. La fonction f est dérivable en 0 et, par définition, on a :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \overset{\text{déf}}{=} f'(0)$$

Or, on sait que, pour $x \in]-1, +\infty[$, on a $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ et, finalement :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$$

On a donc montré que $\ln(1+x) \sim x$ au voisinage de 0.

On peut aussi tout simplement dire que, au voisinage de 0, $\ln(1+x) = x + o(x)$. Or, une fonction est équivalente en 0 au premier terme non nul de son DL(0). D'où le résultat.

(c) Pour $x \neq 0$, on a $\dfrac{x\sin(x)}{x^2} = \dfrac{\sin(x)}{x}$. La fonction sin est bornée entre -1 et 1 sur $\mathbf{R}$. Ainsi, pour tout $x > 0$:

$$\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$$

Or, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Donc, par encadrement, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$ et $x\sin(x) = o(x^2)$ au voisinage de $+\infty$.

(d) Pour $x \neq 3$, on a :

$$\frac{x - \exp(-x)}{x-3} = \frac{x\left(1 - \frac{\exp(-x)}{x}\right)}{x\left(1 - \frac{3}{x}\right)} = \frac{1 - \frac{\exp(-x)}{x}}{1 - \frac{3}{x}}$$

Or, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{\exp(-x)}{x}\right) = 1 - 0 = 1$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right) = 1 - 0 = 1$. Donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x - \exp(-x)}{x-3} = 1$ et $x - \exp(-x) \sim x - 3$ au voisinage de $+\infty$.

Correction de l'Exercice 2.

1. (a) Ce sont (presque) des DL usuels :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$$

(b) On fait le produit des DL trouvés à la question précédente :

$$\begin{aligned}\frac{\cos(x)}{1-x} &= \left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)\left(1+x+x^2+x^3+o(x^3)\right)\\ &= \left(1-\frac{x^2}{2}\right)\left(1+x+x^2+x^3\right)+o(x^3)\\ &= 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o(x^3)\end{aligned}$$

On fait le produit des parties régulières en omettant les termes de degré 4 ou plus, qui sont négligeables devant x^3. Enfin, on n'oublie pas d'ajouter le petit o.

2. (a) Pour une fonction g qui est n fois dérivable au voisinage de 0, la formule de Taylor-Young à l'ordre n au voisinage de 0 s'écrit :

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + ... + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

Attention ! Seule l'hypothèse de dérivabilité est nécessaire pour appliquer la formule de Taylor-Young. L'unicité du DL est une propriété générale qui sert à identifier les coefficients de deux DL d'une même fonction (cf. question suivante) et n'a rien à faire dans cette question.

(b) La fonction f est **3 fois dérivable au voisinage de 0** donc on peut lui appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 0 :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + o(x^3)$$

Par **unicité du DL**, on peut identifier les coefficients de la formule de Taylor-Young avec ceux obtenus dans le DL de la question 1(b). Ainsi, $f(0) = f'(0) = f''(0) = 1$ et $f'''(0) = 3$.

3. (a) Il s'agit de trouver un équivalent simple du numérateur, puis un équivalent simple du dénominateur, et de conclure par quotient d'équivalents. Par substitution et addition de DL, on a :

$$\begin{aligned}f(2x) - 1 - 2x &= \left(1+2x+2x^2\right) - 1 - 2x + o(x^2)\\ &= 2x^2 + o(x^2)\end{aligned}$$

Donc $f(2x) - 1 - 2x \sim 2x^2$ au voisinage de 0. Par substitution toujours, on a :

$$\sin(3x) = 3x + o(x)$$

Donc $\sin(3x) \sim 3x$ au voisinage de 0. *Il est inutile de pousser les DL plus loin : une fonction est équivalente en 0 au premier terme non nul de son DL(0). Donc on peut s'arrêter à l'ordre 2 pour le numérateur et à l'ordre 1 pour le dénominateur.* Ainsi, par quotient d'équivalents :

$$h(x) = \frac{f(2x)-1-2x}{\sin(3x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2x^2}{3x} = \frac{2x}{3}$$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{3} = 0$. La limite cherchée est donc 0.