# Contrôle continu 1 - Mathématiques

Groupe LAS MP - 3 mars 2023

Julian Le Clainche

Le barème est donné à titre indicatif.
Il sera tenu compte de la rédaction dans l'évaluation, en particulier **toute réponse devra être justifiée avec soin** (aucun point ne sera donné à une réponse juste non justifiée)
L'utilisation de la calculatrice ou de tout autre appareil électronique est interdite.

## Exercice 1 [6 pts]

1. Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $x \mapsto 1 - x^2 + x^3 + 2x^5$.
2. Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $x \mapsto \sin(x)$.
3. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $x \mapsto \exp(x)$.
4. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$.
5. Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Donner la formule de Taylor-Young à l'ordre $n$ en 0 pour $f$ en précisant les hypothèses nécessaires sur $f$.

## Exercice 2 [3 pts]

1. Montrer que $x\sin(x) = o(x^2)$ en $+\infty$.
2. Montrer que $\exp(x) - 1 - x = o(x)$ en 0.

## Exercice 3 [5 pts]

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $f_1$ définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f_1(x) = \frac{\cos(x)}{1+x^2}$.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $f_2$ définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f_2(x) = \sqrt[3]{1+x}$.

## Exercice 4 [7 pts]

1. Montrer que le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \exp(-x) - \sqrt{1-2x}$ est donné par
$$\exp(-x) - \sqrt{1-2x} = x^2 + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right).$$
2. En déduire un équivalent simple de $\exp(-x) - \sqrt{1-2x}$ en 0.
3. Justifier que $x\sin(2x) \sim 2x^2$ en 0.
4. Déterminer, si elle existe, la limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp(-x) - \sqrt{1-2x}}{x\sin(2x)}$.

# Correction

Proposée par J. Le Clainche

## Correction exercice 1

1. Le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $x \mapsto 1 - x^2 + x^3 + 2x^5$ est donné par
$$1 - x^2 + x^3 + 2x^5 = 1 - x^2 + x^3 + o\left(x^4\right).$$
2. Au voisinage de 0, on a
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right).$$
3. Au voisinage de 0, on a
$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right).$$
4. Au voisinage de 0, on a
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right).$$
5. Soit $n$ un entier et $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $n$ fois dérivable en 0. D'après la formule de Taylor-Young, au voisinage de 0
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o\left(x^n\right).$$

## Correction exercice 2

1. Pour $x \in \mathbf{R}$, on a $-1 \leq \sin(x) \leq 1$. Ainsi, pour $x \geq 0$, on a $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$.
Or, on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0$.
Finalement, par théorème d'encadrement, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$ et donc, on a montré que
$$x\sin(x) = o\left(x^2\right) \text{ en } +\infty.$$
2. On sait qu'au voisinage de 0, on a $\exp(x) = 1 + x + o(x)$ et donc $\exp(x) - 1 - x = o(x)$ en 0.

## Correction exercice 3

1. Au voisinage de 0, on a
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o\left(x^2\right)$$
et donc par substitution
$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o\left(x^3\right).$$
On a également
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right).$$
Ainsi, par produit, on obtient le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f_1$ :
$$\begin{aligned} f_1(x) &= (1 - \frac{x^2}{2})(1 - x^2) + o\left(x^3\right) \\ &= 1 - \frac{3x^2}{2} + o\left(x^3\right). \end{aligned}$$

2. On commence par remarquer que pour $x$ au voisinage de 0, $f_2(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}}$. C'est donc une fonction de la forme $x \mapsto (1+x)^\alpha$ dont le développement limité est usuel. Au voisinage de 0, on a
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o\left(x^2\right).$$
Ici, $\alpha = \frac{1}{3}$ et $\alpha(\alpha-1) = -\frac{2}{9}$. Le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $f_2$ est donc donné par
$$f_2(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + o\left(x^2\right).$$

# Correction exercice 4

1. Au voisinage de 0 on a
$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) \quad \text{et} \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o\left(x^3\right).$$
Par substitution, on obtient
$$\exp(-x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) \quad \text{et} \quad \sqrt{1-2x} = 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right) \quad \text{au voisinage de 0.}$$
On obtient alors
$$\exp(-x) - \sqrt{1-2x} = x^2 + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right).$$
2. Un équivalent simple d'une fonction est donné par le premier terme non nul de son développement limité. D'après la question précédente, on a donc
$$\exp(-x) - \sqrt{1-2x} \sim x^2 \text{ en } 0.$$
3. On sait que $\sin(x) \sim x$ en 0, on a donc $\sin(2x) \sim 2x$ en 0 par substitution et finalement
$$x\sin(x) \sim 2x^2 \text{ en } 0.$$
4. En utilisant les deux questions précédentes, on obtient par quotient d'équivalents
$$\frac{\exp(-x) - \sqrt{1-2x}}{x\sin(2x)} \sim \frac{1}{2} \text{ en } 0$$
et donc
$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(-x) - \sqrt{1-2x}}{x\sin(2x)} = \frac{1}{2}.$$