CC2 de Mathématiques S2

Groupe MI-e1 - 29 mars 2023

Vincent Souveton

Exercice 1. (/4,5)

1. Donner la formule de Taylor-Young à l'ordre 4 en 0 pour une fonction f, en précisant les hypothèses nécessaires sur f pour appliquer ce résultat.
2. Pour tout réel x, on pose $g(x) = \sin(-x) - 4x$.
   (a) Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $g(x)$.
   (b) En déduire un équivalent simple de $g(x)$ au voisinage de 0.
   (c) Donner alors, si elle existe, la limite quand x tend vers 0 de $\dfrac{g(x)}{2x}$.
3. Pour tout réel x, on pose $h(x) = \cos\left(\exp\left(x^{20} - 2\right)\right)$. Montrer que $h(x) = o(x)$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 2. (/3,5) On considère les espaces munis de leur somme et produit externes usuels. Répondre en justifiant aux questions suivantes :

1. $E_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x - 4xy = 0\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$?
2. $E_2 = \{(a, a, b) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$?
3. $E_3 = \{P \in \mathbf{R}[X] \mid P'(0) = 1\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$?

Exercice 3. (/7) Dans l'espace des matrices carrées $(\mathcal{M}_2(\mathbf{R}), +, \cdot)$, on considère les deux sous-ensembles $D = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \ ; \ a, d \in \mathbf{R}\right\}$ et $A = \left\{\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \ ; \ b, c \in \mathbf{R}\right\}$.

1. Montrer que D, muni de la somme et du produit externe usuels, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. *On admettra dans la suite que A muni de ces opérations est aussi sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.*
2. Donner une base et la dimension de D. De même, donner une base et la dimension de A.
3. Montrer que D et A sont en somme directe.
4. En déduire que $D \oplus A = \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.
5. Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \pi & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Écrire M comme somme d'une matrice de D et d'une matrice de A. Cette écriture est-elle unique ?

Exercice 4. (/5) Dire, en justifiant, si les applications suivantes sont linéaires.

1. $f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto x - 1$
2. $f_2 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, \quad (x, y) \mapsto xy$
3. $f_3 : \mathbf{R}[X] \to \mathbf{R}[X], \quad P \mapsto -P$
4. $f_4 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4, \quad (x, y, z) \mapsto (2z, y, x, 10)$
5. $f_5 : \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}, \quad f \mapsto f(2)$

Correction des exercices

Correction de l'Exercice 1.

1. La formule de Taylor-Young pour une fonction f 4 fois dérivable au voisinage de 0 s'écrit :
$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \frac{x^3}{6}f'''(0) + \frac{x^4}{24}f''''(0) + o_{x\to 0}(x^4)$$

2. (a) $g(x) = -5x + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$

   (a) Une fonction est équivalente en 0 au premier terme non nul de son DL(0). Ici, on a donc $g(x) \sim -5x$.

   (a) Ainsi, par quotient d'équivalents, $\dfrac{g(x)}{2x} \sim \dfrac{-5x}{2x} = -\dfrac{5}{2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{-5}{2}$. La limite cherchée est donc $\dfrac{-5}{2}$.

3. La fonction cos étant bornée entre -1 et 1 sur $\mathbf{R}$, on peut écrire, pour tout $x > 0$:
$$\frac{-1}{x} \leq \frac{h(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$$
Or, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$. Par encadrement, on a donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = 0$ et $h(x) = o(x)$ au voisinage de $+\infty$.

Correction de l'Exercice 2.

1. Le vecteur $(1, \frac{1}{4})$ appartient à l'espace E_1 car $1 - 4 \times 1 \times \frac{1}{4} = 0$. Cependant, le vecteur $2 \cdot (1, \frac{1}{4})$ n'appartient pas à l'espace car $2 - 4 \times 2 \times \frac{1}{2} = -2 \neq 0$. Ainsi, E_1 n'est pas stable par produit externe et donc ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$.

2. C'est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$. En effet :
   - $(0, 0, 0) \in E_2$ (cas où $a = b = 0$) donc E_2 est non vide.
   - Soient $(a, a, b), (a', a', b') \in E_2$ et $c \in \mathbf{R}$. Alors, $(a, a, b) + c \cdot (a', a', b') = (a + ca', a + ca', b + cb') \in E_2$ car les deux premières coordonnées de ce vecteur sont égales. Donc E_2 est stable par somme et produit externe.

3. Le polynôme nul n'appartient pas à E_3 car sa dérivée est le polynôme nul qui, évalué en 0, vaut 0, et pas 1. Donc E_3 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$.

Correction de l'Exercice 3.

1.
   - La matrice nulle est bien dans D (cas où $a = d = 0$) donc D est non vide.
   - Soient $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & d' \end{pmatrix} \in D$ et $k \in \mathbf{R}$. Alors, $M + kN = \begin{pmatrix} a + ka' & 0 \\ 0 & d + kd' \end{pmatrix} \in D$ car ses deux termes antidiagonaux sont bien nuls. Donc D est stable par somme et produit externe.

   En conclusion, D est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

2. Tout matrice de D s'écrit sous la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est génératrice de D. Comme elle est clairement libre, c'est en fait une base de D et $\dim D = 2$.

   Par un raisonnement similaire, on obtient que la famille $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est une base de A et $\dim A = 2$.

3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in D \cap A$. Alors, puisque $M \in D$, on a $a = d = 0$. De plus, puisque $M \in A$, on a $b = c = 0$. En conclusion, $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, $D \cap A = \{0\}$ et les deux espaces sont en somme directe.
4. D et A sont en somme directe avec $\dim D + \dim A = 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Les espaces D et A sont donc supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.
5. On a $M = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\in D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \pi & 0 \end{pmatrix}}_{\in A}$. Cette écriture comme somme d'une matrice de D et d'une matrice de A est unique, les espaces D et A étant supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

Correction de l'Exercice 4.

1. $f_1(0) \neq 0$ donc f_1 n'est pas linéaire.
2. $f_2(2 \cdot (2,2)) = f_2(4,4) = 16$ mais $2 \cdot f_2(2,2) = 8$. Donc f_2 n'est pas linéaire.
3. Soient $P, Q \in \mathbf{R}[X]$ et $c \in \mathbf{R}$.
$$\begin{aligned} f(P + cQ) &= -(P + cQ) \\ &= -P - cQ \\ &= f(P) + cf(Q) \end{aligned}$$
donc f_3 est linéaire.
4. $f_4(0,0,0) \neq (0,0,0,0)$ donc f_4 n'est pas linéaire.
5. Soient $g, h \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ et $k \in \mathbf{R}$.
$$\begin{aligned} f_5(g + kh) &= (g + kh)(2) \\ &= g(2) + kh(2) \\ &= f_5(g) + kf_5(h) \end{aligned}$$
donc f_5 est linéaire.