Contrôle continu 2 - Mathématiques

MP3 LAS MP - 25 Avril 2023

> Le barème est donné à titre indicatif.
> Il sera tenu compte de la rédaction dans l'évaluation, en particulier **toute réponse devra être justifiée avec soin** (aucun point ne sera donné à une réponse juste non justifiée)
> L'utilisation de la calculatrice ou de tout autre appareil électronique est interdite.

Exercice 1 [3 pts]

On considère les espaces munis de leur somme et produit externe usuels. Répondre aux questions suivantes en justifiant.

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - x^2 = 0\}$ est il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
2. $E_2 = \{(a, b, 2a) \in \mathbb{R}^3 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ est il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
3. $E_3 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 1 \text{ et } P'(1) = 0\}$ est il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 2 [5 pts]

Les applications suivantes sont elles linéaires ? Justifier.

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array},$
2. $f_2 : \begin{array}{ccc} M_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & a + d - 1 \end{array},$
3. $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & xy + z \end{array},$
4. $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}^2 \\ P & \mapsto & (P(0), P'(0)) \end{array},$
5. $f_5 : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & g(1) \end{array}.$

Exercice 3 [6 pts]

On pose $F = \{(a - c, b + c) \in \mathbb{R}^2, \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \mid x = z \text{ et } y + z = 0\}$ et on considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x - z, y + z) \end{array},$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. En déduire que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ et que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base et la dimension de G.
4. En déduire la dimension de F et donner une base de F.
5. L'application f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 4 [9 pts]

On considère l'application linéaire $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x-y, 3x+z, x+y+z) \end{array}$.

1. Soit A la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer A.
2. Calculer $\det(A)$. L'application f est-elle bijective ?
3. Montrer que $\ker(f)$ est un sous espace vectoriel de dimension 1 engendré par un vecteur u_1 à déterminer.
4. En déduire que $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 2 et en donner une base (u_2, u_3).
5. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. Soit $u = (0, 2, -2)$. Déterminer $v \in \ker(f)$ et $u_G w \in \mathrm{Im}(f)$ tels que $u = v + w$. Cette écriture est-elle unique ?

Question Bonus [1 pts]

Soit E un espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Correction

Proposée par J. Le Clainche

Correction exercice 1

1. On pose $u = (1, 1, 0)$ et $v = (-1, 1, 0)$. On a clairement $u \in E_1$ et $v \in E_1$. Or, $u + v = (0, 2, 0)$ et $2 - 0^2 = 2 \neq 0$ donc $u + v \notin E_1$. L'ensemble E_1 n'est donc pas stable pour l'addition et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. Montrons que E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   - Le vecteur nul est de la forme $(a, b, 2a)$ avec $a = b = 0$ donc $(0, 0, 0) \in E_2$ et $E_2 \neq \emptyset$
   - Soient $u, v \in E_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par définition, il existe $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ tels que $u = (a, b, 2a)$ et $v = (a', b', 2a')$.
     On pose $w = u + \lambda v$, on a $w = (a + \lambda a', b + \lambda b', 2(a + \lambda a'))$ et donc $w \in E_2$.
     Ainsi E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

3. Le polynôme nul ne vérifie pas $P(0) = 1$ donc $0_{\mathbb{R}[X]} \notin E_3$ et E_3 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Correction exercice 2

1. Soient $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   $$\begin{aligned} f_1((x, y) + \lambda(x', y')) &= f_1(x + \lambda x', y + \lambda y') \\ &= (x + \lambda x') + (y + \lambda y') \\ &= x + y + \lambda(x' + y') \\ &= f_1(x, y) + \lambda f_1(x', y') \end{aligned}$$
   L'application f_1 est donc linéaire.

2. On a $f_2\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = -1 \neq 0$ donc f_2 n'est pas linéaire.

3. Soient $u = (1, 0, 0)$ et $v = (0, 1, 0)$. On a $f_3(u) = 0$ et $f_3(v) = 0$.
   Or $f_3(u + v) = f_3(1, 1, 0) = 1 \neq f_3(u) + f_3(v) = 0$ donc f_3 n'est pas linéaire.

4. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   $$\begin{aligned} f_4(P + \lambda Q) &= ((P + \lambda Q)(0), (P + \lambda Q)'(0)) \\ &= (P(0), P'(0)) + \lambda(Q(0), Q'(0)) \\ &= f_4(P) + \lambda f_4(Q) \end{aligned}$$
   Donc f_4 est linéaire.

5. Soient $g, h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a
   $$\begin{aligned} f_5(g + \lambda h) &= (g + \lambda h)(1) \\ &= g(1) + \lambda h(1) \\ &= f_5(g) + \lambda f_5(h). \end{aligned}$$
   L'application f_5 est donc linéaire.

Correction Exercice 3

1. Soient $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   $$\begin{aligned} f((x, y, z) + \lambda(x', y', z')) &= f(x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z') \\ &= ((x + \lambda x') - (z + \lambda z'), (y + \lambda y') + (z + \lambda z')) \\ &= (x - z, y + z) + \lambda(x' - z', y' + z') \\ &= f(x, y) + \lambda f(x', y') \end{aligned}$$

2. On remarque que $F = \text{Im}(f)$ et $G = \ker(f)$ donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ et G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

3. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a
$$\begin{aligned}(x,y,z) \in G &\iff \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases} \\ &\iff (x,y,z) = z \times (1,-1,1)\end{aligned}$$
En posant $u_1 = (1, -1, 1)$, on a montré que $\dim(G) = 1$ et que G est engendré par u_1.

4. On sait que $F = \text{Im}(f)$ et $G = \ker(f)$. Or, d'après le théorème du rang, on a $3 = \dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(G) + \dim(F)$.
Ainsi $\dim(F) = 3 - 1 = 2$.
F est est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ de dimension 2 donc $F = \mathbb{R}^2$. Une base de F est donc donnée par la base canonique (e_1, e_2).

5. D'après les questions précédentes, l'application f est surjective mais pas injective.

Correction Exercice 4

1. On a $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. En développant par rapport à la première ligne, on trouve
$$\begin{aligned}\det A &= 2 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times (0 \times 1 - 1 \times 1) + (3 \times 1 - 1 \times 1) + 0 \\ \det A &= 0.\end{aligned}$$
On a $\det(f) = \det(A) = 0$ donc f n'est pas bijective.

3. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a
$$\begin{aligned}(x,y,z) \in \ker(f) &\iff \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 2x \\ z = -3x \end{cases} \\ &\iff (x,y,z) = x \times (1, 2, -3)\end{aligned}$$
Si on pose $u_1 = (1, 2, -3)$, on a montré que $\ker(f)$ est engendré par u_1 et que $\dim(\ker(f)) = 1$.

4. En utilisant le théorème du rang, on obtient $\dim(\text{Im}(f)) = 3 - 1 = 2$.
On pose $u_2 = f(0, 1, 0) = (-1, 0, 1)$ et $u_3 = f(0, 0, 1) = (0, 1, 1)$. La famille (u_2, u_3) est une famille libre à 2 éléments de $\text{Im}(f)$, c'est donc une base (car $\dim(\text{Im}(f)) = 2$).

5. Pour $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$, on a
$$\begin{aligned}\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0_{\mathbf{R}^3} &\iff \begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ 2\alpha + \gamma = 0 \\ -3\alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha = \beta \\ \gamma = -2\alpha \\ -3\alpha + \alpha - 2\alpha = -4\alpha = 0 \end{cases} \\ &\iff \alpha = \beta = \gamma = 0\end{aligned}$$
La famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est libre donc (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

6. Les vecteurs $v = u_1 = (1, 2, -3)$ et $w = u_2 = (-1, 0, 1)$ conviennent.
   D'après la question précédente, la concaténation d'une base de $\ker(f)$ et d'une base de $\mathrm{Im}(f)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$ donc $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
   Cela signifie que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ s'écrit **de manière unique** comme la somme d'un vecteur de $\ker(f)$ et d'un vecteur de $\mathrm{Im}(f)$. Cette écriture ci-dessus est donc unique.

Correction Question Bonus

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, montrons que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel.

- F et G étant des sous-espaces vectoriels de E, on a $0 \in F$ et $0 \in G$ donc $0 \in F \cap G$ et donc $F \cap G \neq 0$.
- Soient $u, v \in F \cap G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
  On a d'une part $u, v \in F$ et donc $u + \lambda v \in F$ car F est un sous-espace vectoriel de E.
  De même, on a $u + \lambda v \in G$.
  On a donc $u + \lambda v \in F \cap G$ et $F \cap G$ est stable pour l'addition et la multiplication par un scalaire.

Finalement $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.