CC3 de Mathématiques S2

Groupe MI-e1 - 4 mai 2023

Vincent Souveton

Exercice 1. (/4)

1. Donner la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en 0 pour une fonction f, en précisant les hypothèses nécessaires sur f pour appliquer ce résultat.
2. Donner le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $g(x) = \sqrt{1-2x}$
3. Montrer que $x^2 = o(\cos(x))$ au voisinage de 0.

Exercice 2. (/5) On considère les espaces munis de leur somme et produit externes usuels.

1. $E_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 - 2y = 0\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$? Justifier.
2. $E_2 = \{P \in \mathbf{R}[X] \mid P'(2) = 0\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$? Justifier.
3. Soient E et F deux espaces vectoriels quelconques et $h : E \to F$ une application linéaire. Montrer que $\ker(h)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 3. (/10) On considère s l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ défini pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ par

$$s(x, y, z) = (x + z,\ y,\ x + z)$$

1. (a) Montrer que s est linéaire.
   (b) Écrire la matrice M de s dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbf{R}^3$.
   (c) Calculer le déterminant de M. L'application s est-elle bijective ?
2. (a) Déterminer $\ker(s)$ et donner sa dimension.
   (b) En déduire que $\mathrm{Im}(s)$ est de dimension 2 et donner une base de $\mathrm{Im}(s)$.
   (c) Les espaces $\ker(s)$ et $\mathrm{Im}(s)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$?
3. On pose $u_1 = (1, 0, -1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$ et $u_3 = (0, 1, 0)$.
   (a) Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbf{R}^3$.
   (b) Écrire la matrice N de s dans la nouvelle base (u_1, u_2, u_3).

Exercice 4. (/4)

1. Donner sans justification un exemple de suite croissante qui converge vers 0.
2. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = \frac{1}{2}$. Donner directement l'expression du terme général de la suite ainsi que sa limite, si elle existe.
3. Calculer la limite de la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie pour tout entier naturel n par $v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}$.
4. Déterminer un équivalent simple de $\sin\left(\frac{1}{2+n^2}\right)$.

Correction des exercices

Correction de l'Exercice 1.

1. La formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en 0 pour une fonction f trois fois dérivable au voisinage de 0 s'écrit :
$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \frac{x^3}{6}f'''(0) + o(x^3)$$

2. Au voisinage de 0, on a :
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$
Par substitution, on obtient :
$$g(x) = 1 - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

3. Lorsque $x \to 0$, $x^2 \to 0$ et $\cos(x) \to 1$. Par quotient, on a donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\cos(x)} = 0$ et, par conséquent, $x^2 = o(\cos(x))$ au voisinage de 0.

Correction de l'Exercice 2.

1. **Non.** En effet, $(\sqrt{2}, 1) \in E_1$ car $(\sqrt{2})^2 - 2 \times 1 = 0$. En revanche, $2 \cdot (\sqrt{2}, 1) = (2\sqrt{2}, 2) \notin E_1$ car $(2\sqrt{2})^2 - 2 \times 2 = 4 \neq 0$. Ainsi, E_1 n'est pas stable par produit externe et ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$.

2. **Oui.** En effet :
   - $0 \in E_2$ car le polynôme dérivé du polynôme nul est lui-même et, évalué en 2, il vaut bien 0.
   - Soient $P,\ Q \in E_2$ et $c \in \mathbf{R}$:
   $$\begin{aligned}(P + c \cdot Q)'(2) &= P'(2) + c \times Q'(2) \\ &= 0 + c \times 0 \\ &= 0\end{aligned}$$
   l'avant-dernière égalité provenant du fait que P et Q sont dans E_2.

   Ainsi, $E_2 \subset \mathbf{R}[X]$ est non-vide, stable par somme et stable par produit externe. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$.

3. On utilise la caractérisation usuelle en se rappelant que $\ker(h) \overset{\text{déf}}{=} \{x \in E \mid h(x) = 0_F\}$:
   - h est linéaire donc $h(0_E) = 0_F$. Ainsi, $0_E \in \ker(h)$.
   - Soient $x,\ y \in \ker(h)$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Par linéarité de h, il vient :
   $$\begin{aligned}h(x + \lambda \cdot y) &= h(x) + \lambda \cdot h(y) \\ &= 0_F + \lambda \cdot 0_F \\ &= 0_F\end{aligned}$$
   l'avant-dernière égalité provenant du fait que x et y sont dans $\ker(h)$.

   Ainsi, $\ker(h) \subset E$ est non-vide, stable par somme et stable par produit externe. C'est donc un sous-espace vectoriel de E.

Correction de l'Exercice 3.

1. (a) Soient $(x_1,y_1,z_1),\ (x_2,y_2,z_2)\in\mathbf{R}^3$ et $c\in\mathbf{R}$:

$$\begin{aligned}
s((x_1,y_1,z_1)+c\cdot(x_2,y_2,z_2)) &= s(x_1+cx_2,\ y_1+cy_2,\ z_1+cz_2)\\
&= (x_1+z_1+c(x_2+z_2),\ y_1+cy_2,\ x_1+z_1+c(x_2+z_2))\\
&= (x_1+z_1,\ y_1,\ x_1+z_1)+c\cdot(x_2+z_2,\ y_2,\ x_2+z_2)\\
&= s(x_1,y_1,z_1)+c\cdot s(x_2,y_2,z_2)
\end{aligned}$$

Donc s est bien linéaire.

(b)
- $s(e_1)=s(1,0,0)=(1,0,1)=1\cdot e_1+0\cdot e_2+1\cdot e_3$
- $s(e_2)=s(0,1,0)=(0,1,0)=0\cdot e_1+1\cdot e_2+0\cdot e_3$
- $s(e_3)=s(0,0,1)=(1,0,1)=1\cdot e_1+0\cdot e_2+1\cdot e_3$

d'où, en écrivant ces coordonnées côtes à côtes, dans l'ordre et en colonne, $M=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.

(c) En développant par rapport à la deuxième colonne, on trouve $\det M = 1\times\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0$. Puisque le déterminant est nul, la matrice n'est pas inversible et l'application linéaire s qu'elle représente n'est pas bijective.

2. (a) On résout le système suivant :

$$\begin{aligned}
(x,y,z)\in\ker(s) &\iff s(x,y,z)=0\\
&\iff \begin{cases}x+z=0\\y=0\\x+z=0\end{cases}\\
&\iff (x,y,z)=x\cdot(1,0,-1)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\ker(s)=\mathrm{Vect}((1,0,-1))$ est de dimension 1.

(b) D'après le théorème du rang, $\dim\mathrm{Im}(s)=\dim\mathbf{R}^3-\dim\ker(s)=3-1=2$. Une base de $\mathrm{Im}(s)$ est donc donnée par deux vecteurs non colinéaires de $\mathrm{Im}(s)$. Par exemple, $s(e_1)=(1,0,1)$ et $s(e_2)=(0,1,0)$ sont, par définition, dans $\mathrm{Im}(s)$ et ne sont pas colinéaires. En conclusion, $(s(e_1),s(e_2))$ est une base de $\mathrm{Im}(s)$.

(c) *Méthode 1 :* On a $\dim\mathrm{Im}(s)+\dim\ker(s)=3=\dim\mathbf{R}^3$. Reste à calculer l'intersection entre les deux espaces. Déjà, on a trivialement que $\{0\}\subset\ker(s)\cap\mathrm{Im}(s)$, les deux espaces étant des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$. Pour l'inclusion réciproque, soit $(x,y,z)\in\ker(s)\cap\mathrm{Im}(s)$. Puisque $(x,y,z)\in\ker(s)$, il existe un réel a tel que $(x,y,z)=a\cdot(1,0,-1)$. Et puisque $(x,y,z)\in\mathrm{Im}(s)$, il existe deux réels b et c tels que $(x,y,z)=b\cdot(1,0,1)+c\cdot(0,1,0)$. Cela implique que :

$$\begin{cases}a=b\\c=0\\-a=b\end{cases}\iff\begin{cases}a=0\\b=0\\c=0\end{cases}$$

et donc que $(x,y,z)=(0,0,0)$. En conclusion, $\{0\}=\ker(s)\cap\mathrm{Im}(s)$. Cela finit de montrer que les deux espaces sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.

Méthode 2 : La famille $((1,0,-1),\ (1,0,1),\ (0,1,0))$, concaténation d'une base de $\ker(s)$ et de $\mathrm{Im}(s)$, contient $3=\dim\mathbf{R}^3$ vecteurs. Aussi, elle est libre car $\begin{vmatrix}1&1&0\\0&0&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=-1\times\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}=-2\neq0$ (en développant par rapport à la troisième colonne). C'est donc une base de $\mathbf{R}^3$ et cela montre que $\ker(s)$ et $\mathrm{Im}(s)$ sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.

3. (a) On peut reprendre exactement la même démonstration qu'à la question précédente (Méthode 2).

   (b)
   - $s(u_1) = (0,0,0) = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$
   - $s(u_2) = (2,0,2) = 0 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$
   - $s(u_3) = (0,1,0) = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 1 \cdot u_3$

   d'où, en écrivant ces coordonnées côtes à côtes, dans l'ordre et en colonne, $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'Exercice 4.

1. La suite de terme général $\dfrac{-1}{n}$, pour $n \geq 1$, convient.

2. On utilise la méthode du conjugué :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

3. D'après le cours, $v_n = \dfrac{3}{2^n}$, pour tout entier naturel n. Puisque $|q| < 1$, cette suite géométrique converge vers 0.

4. Grâce aux développements limités usuels, on a $\sin(X) \sim X$ quand $X \to 0$. Ici, $\dfrac{1}{2+n^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, au voisinage de $+\infty$:

$$\sin\left(\frac{1}{2+n^2}\right) \sim \frac{1}{2+n^2} \sim \frac{1}{n^2}$$