Examen Intermédiaire du 14 mars 2023

Durée : 1h30

L'usage de tout document, calculatrice et de tout matériel connecté est interdit.
Il sera tenu compte de la rédaction. En particulier, les réponses ***doivent être justifiées****.*
Les exercices sont indépendants. Le sujet comporte deux pages.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 0. Ecrire le numéro de votre groupe sur la copie.

Questions de cours. *(4 points)*

1. Soit f une fonction 3 fois dérivable au voisinage de 0. Rappeler la formule de Taylor-Young qui donne le développement limité de f en 0 à l'ordre 3.
2. Soit α un nombre réel ou $-\infty$ ou $+\infty$. Soient f, g et h trois fonctions définies dans un voisinage de α tel que ces fonctions ne s'annulent pas dans ce voisinage, sauf éventuellement en α.

   Montrer que si $h = o(f)$ en α et $f \sim g$ en α, alors $h = o(g)$ en α.

Exercice 1. *(2,5 points)*
Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant les réponses.

1. $2x + 3\cos(x) = o(x^2)$ en $+\infty$.
2. $\ln(1 + e^x) \sim x$ en $+\infty$.

Exercice 2. *(1,5 point)*
Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{1+x} - \frac{1}{1-2x}\,.$$

Exercice 3. *(5 points)*
Soit $f\colon]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \sin(x)\ln(1+x).$$

1. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de f en utilisant les développements limités usuels.
2. En déduire les valeurs de $f'(0)$, $f''(0)$ et $f'''(0)$.
3. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $g(x) = e^{x^2} - \cos(x)$.
4. En déduire, si elle existe, la limite lorsque x tend vers 0 de

$$\frac{e^{x^2} - \cos(x)}{\sin(x)\ln(1+x)}\,.$$

Tourner la page

Exercice 4. *(3 points)*

1. L'ensemble $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + yz = 0\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Justifier la réponse.
2. L'ensemble $E_2 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P'(1) = 0\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$? Justifier la réponse.

Exercice 5. *(4,5 points)*
On considère les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

$$F = \big\{(a, 2a, 3a) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R}\big\} \qquad \text{et} \qquad G = \big\{(b, b + c, 2c) \in \mathbb{R}^3 \mid b \in \mathbb{R},\, c \in \mathbb{R}\big\}.$$

On ne demande pas de démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer $F \cap G$.
2. Les sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^3$ sont-ils en somme directe ? Sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$? Justifier la réponse.

Exercice 6. *(1,5 point)*
La famille $\mathcal{F} = \{u_1, u_2, u_3\}$ avec $u_1 = (1, -1, 1)$, $u_2 = (-1, 2, 2)$ et $u_3 = (1, 1, 7)$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^3$? Justifier la réponse.

Correction de l'examen intermédiaire

Proposée par J. Le Clainche et Vincent Souveton

Questions de cours

1. Au voisinage de 0, $f(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2}x^2 + \dfrac{f'''(0)}{6}x^3 + o(x^3)$.
2. D'après l'énoncé, $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{h(x)}{f(x)} = 0$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. Ainsi, au voisinage de α :

$$\frac{h(x)}{g(x)} = \frac{h(x)}{f(x)} \times \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to\alpha}{\longrightarrow} 0 \times 1 = 0$$

   Donc $h = o(g)$ en α.

Exercice 1

1. On s'intéresse au quotient $\dfrac{2x + 3\cos(x)}{x^2} = \dfrac{2}{x} + \dfrac{3\cos(x)}{x^2}$.
   Pour $x \in \mathbf{R}$, on a $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et donc, pour $x > 0$, on a $-\frac{3}{x^2} \leq \frac{3\cos(x)}{x^2} \leq \frac{3}{x^2}$.
   Or on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{3}{x^2} = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x^2}$ et donc par théorème d'encadrement, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3\cos(x)}{x^2} = 0$.
   Finalement on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x + 3\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{3\cos(x)}{x^2} = 0.$$

   Ainsi, on a montré que $2x + 3\cos(x) = o\left(x^2\right)$ en $+\infty$ et la proposition est **VRAIE**.
2. En utilisant les propriétés du ln, on a pour $x \in \mathbf{R}$
   $\ln(1 + e^x) = \ln(e^x(1 + e^{-x}) = \ln(e^x) + \ln(1 + e^{-x})$
   $= x + \ln(1 + e^{-x})$.
   Or $e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\ln(1 + e^{-x}) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1) = 0$.
   Ainsi, on a $\frac{\ln(1+e^x)}{x} = 1 + \frac{\ln(1+e^{-x})}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc $\ln(1 + e^x) \sim x$ en $+\infty$ et la proposition est **VRAIE**.

Exercice 2

Au voisinage de 0,

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

et, par substitution,

$$\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 4x^2 + o(x^2)$$

On peut alors sommer les deux $\mathrm{DL}_2(0)$ ainsi obtenus :

$$\sqrt{1+x} - \frac{1}{1-2x} = -\frac{3}{2}x - \frac{33}{8}x^2 + o(x^2)$$

Exercice 3

1. Au voisinage de 0, on a

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) \qquad \text{et} \qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right).$$

   Ainsi, par produit des $\mathrm{DL}_3(0)$, on obtient

$$f(x) = \sin(x)\ln(1+x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right).$$

2. La fonction f est 3 fois dérivable en 0, on peut donc lui appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en 0 :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + o(x^3)$$

   De plus, par unicité du dévellopement limité, on peut identifier les coefficients et on trouve

$$f'(0) = 0, \quad f''(0) = 2 \quad \text{et} \quad f'''(0) = -3.$$

3. Au voisinage de 0, on a

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) \qquad \text{et} \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) \qquad \text{et par substitution} \qquad e^{x^2} = 1 + x^2 + o\left(x^2\right).$$

   Ainsi, en sommant les $\mathrm{DL}_2(0)$, on obtient

$$g(x) = e^{x^2} - \cos(x) = \frac{3x^2}{2} + o\left(x^2\right).$$

4. On déduit des DL calculés aux questions 1 et 3 que $f(x) \sim x^2$ en 0 et $g(x) \sim \frac{3x^2}{2}$ en 0. Ainsi, par quotient d'équivalent, on obtient

$$\frac{e^{x^2} - \cos(x)}{\sin(x)\ln(1+x)} \sim \frac{3}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{3}{2}.$$

Exercice 4

1. On remarque que $u = (0,1,0) \in E_1$ et $v = (0,0,1) \in E_1$ or $w = u+v = (0,1,1) \notin E_1$ donc E_1 n'est pas stable pour l'addition et ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

2. Montrons que E_2 est un sous espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$
   - Il est clair que le polynôme nul $0_{\mathbf{R}[X]} \in E_2$. En effet, la dérivée du polynôme nul est encore le polynôle nul qui vaut en particulier 0 quand il est évalué en 1. Donc $E_2 \neq \emptyset$.
   - Soient $P, Q \in E_2$, on a $(P+Q)'(1) = P(1)' + Q(1)' = 0$ car $P, Q \in E_2$. Ainsi $P + Q \in E_2$ et E_2 est stable pour l'addition.
   - Soiet $P \in E_2$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, $(\lambda P)'(1) = \lambda(P'(1)) = 0$ donc $\lambda P \in E_2$ et E_2 est stable pour la multiplication par un scalaire.

   On a donc montré que E_2 est non-vide, stable pour l'addition et la multiplication par un scalaire donc c'est un sous espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$.

Exercice 5

1. Soit $u \in F \cap G$. Alors, il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $u = (a, 2a, 3a)$ et $b, c \in \mathbf{R}$ tels que $u = (b, b+c, 2c)$. Ainsi,

$$\begin{cases} a = b \\ 2a = b + c \\ 3a = 2c \end{cases} \iff \begin{cases} a - b = 0 \\ 2a - b - c = 0 \\ 3a - 2c = 0 \end{cases} \overset{\text{Pivot}}{\iff} \begin{cases} a - b = 0 \\ b - c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

   Donc $F \cap G \subset \{0_{\mathbf{R}^3}\}$. Comme $\{0_{\mathbf{R}^3}\} \subset F \cap G$ (F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$), alors on a finalement $F \cap G = \{0_{\mathbf{R}^3}\}$

2. Comme l'intersection entre F et G est réduite à l'espace trivial $\{0_{\mathbf{R}^3}\}$, alors F et G sont bien en somme directe *(attention, en somme directe $\neq$ supplémentaires)*. Pour voir s'ils sont supplémentaires, il reste donc à montrer si $F + G = \mathbf{R}^3$. On a déjà l'inclusion évidente $F + G \subset \mathbf{R}^3$, puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$. On va montrer que $\mathbf{R}^3 \subset F + G$ en procédant à une analyse-synthèse.

   Analyse : on suppose que tout vecteur $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ peut s'écrire comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. Cela revient à dire qu'il existe des réels a, b et c tels que :

$$(x, y, z) = (a, 2a, 3a) + (b, b+c, 2c)$$
$$\iff \begin{cases} a + b = x \\ 2a + b + c = y \\ 3a + 2c = z \end{cases} \overset{\text{Pivot}}{\iff} \begin{cases} a + b = x \\ -b + c = y - 2x \\ -c = z - 3y + 3x \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2x - 2y + z \\ b = -x + 2y - z \\ c = -3x + 3y - z \end{cases}$$

Synthèse : On reprend les résultats de la partie analyse. Tout vecteur $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}(x,y,z) =&(\overbrace{2x-2y+z}^{a}, \overbrace{2(2x-2y+z)}^{2a}, \overbrace{3(2x-2y+z)}^{3a})\\ &+(\underbrace{-x+2y-z}_{b}, \underbrace{(-x+2y-z)+(-3x+3y-z)}_{b+c}, \underbrace{2(-3x+3y-z)}_{2c})\end{aligned}$$

avec
— $(2x-2y+z, 2(2x-2y+z), 3(2x-2y+z)) \in F$
— $(-x+2y-z, (-x+2y-z)+(-3x+3y-z), 2(-3x+3y-z)) \in G$
Donc $\mathbf{R}^3 \subset F+G$. En conclusion, on a montré que $F+G = \mathbf{R}^3$ et $F \cap G = \{0_{\mathbf{R}^3}\}$. Cela prouve que F et G sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.

Exercice 6

Pour $a, b, c \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned}au_1+bu_2+cu_3 = 0_{\mathbf{R}^3} &\iff \begin{cases} a-b+c=0\\ -a+2b+c=0\\ a+2b+7c=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases} a-b+c=0\\ b+2c=0\\ 3b+6c=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases} a-b+c=0\\ b=-2c\end{cases}\\ &\iff \begin{cases} a=b-c=-3c\\ b=-2c\end{cases}\end{aligned}$$

Ce système admet des solutions non triviales, en particulier une solution est donnée par $a = 3, b = 2$ et $c = -1$. On a donc $3u_1 + 2u_2 - u_3 = 0_{\mathbf{R}^3}$ et la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est liée.