Examen terminal du 12 mai 2023

Durée : 2h

L'usage de tout document, calculatrice et de tout matériel connecté est interdit.
Il sera tenu compte de la rédaction. En particulier, les réponses ***doivent être justifiées****.*
Les exercices sont indépendants. Le sujet comporte deux pages.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 0. Ecrire le numéro de votre groupe sur la copie.

Exercice 1. ***Questions de cours.*** *(environ* 20% *-)* (*Les questions (1), (2) et (3) sont indépendantes.*)

(1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
Écrire, avec des quantificateurs, la phrase mathématique : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée ».

(2) Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse.
Justifier les réponses (par une démonstration ou par un contre-exemple).

- **(a)** Soit E un espace vectoriel, de dimension $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 3$. Soient u_1, u_2, u_3 des vecteurs de E. Si la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est liée, alors u_3 peut s'écrire comme combinaison linéaire de u_1 et u_2.
- **(b)** Soient E, F et G trois espaces vectoriels. Soient $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$ deux applications linéaires. Alors l'application $g \circ f\colon E \to G$ est une application linéaire.
- **(c)** Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Si $\dim(F) = \dim(G)$, alors $F = G$.

(3) Soit E un espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

- **(a)** Justifier l'inégalité : $\dim(F \cap G) \leq \dim(G)$.
- **(b)** Démontrer l'équivalence : $\dim(F \cap G) = \dim(G)$ si et seulement si $G \subset F$.

Exercice 2. *(environ* 20% *-)*
Soient $u_1 = (1, 1, -1, 0)$, $u_2 = (0, 1, -1, 1)$, $u_3 = (-1, 0, 2, -1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ et soient

$$F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3) \qquad \text{et} \qquad G = \{\, (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + t = 0 \ \text{ et } \ y + z - 2t = 0 \,\}.$$

(1) **(a)** Déterminer une base de F.

- **(b)** Peut-on compléter la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ pour former une base de $\mathbb{R}^4$? On justifiera la réponse en donnant un énoncé précis du cours.
- **(c)** Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

(2) Déterminer une base de G.

(3) **(a)** Montrer que $u_1 \in G$.
On admet que (u_1) est une base de $F\cap G$. En déduire $\dim(F+G)$ puis que $F+G = \mathbb{R}^4$.

- **(b)** Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Tourner la page SVP

Exercice 3. *(environ 25% -)*

(1) Calculer le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

On considère la famille $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, v_3\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ où :

$$v_1 = (2, -1, 1),\ v_2 = (-1, 2, 1),\ v_3 = (-1, 1, 2).$$

On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}(3x + y + z, -3x - y - z, 0).$$

(2) Démontrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(3) Donner la matrice A de f dans la base $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^3$.

(4) L'application linéaire f est-elle surjective ? Est-elle injective ?

(5) Déterminer une base de l'image de f et le rang de f.

(6) Déterminer la dimension du noyau de f.

Exercice 4. *(environ 15% -)*

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(1 + 2x)\exp(x)$ pour $x \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

(1) Donner le développement limité de f à l'ordre 3 en 0.

(2) En déduire un équivalent simple en 0 de la fonction g définie par $g(x) = f(x) - 2\sin(x)$ pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

On considère la suite u définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = f\left(\frac{1}{n^2}\right) - 2\sin\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

(3) Déterminer un équivalent de la suite u.

(4) Donner, selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, la limite éventuelle de la suite $(n^\alpha u_n)_{n\geq 1}$. On justifiera soigneusement la réponse. *(On pourra éventuellement, pour obtenir une partie des points, traiter les cas $\alpha = 1$, $\alpha = 6$ et $\alpha = 8$.)*

Exercice 5. *(environ 20% -)*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3 - \dfrac{6}{u_n + 4} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Soit $f\colon [1, 2] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 3 - \dfrac{6}{x + 4}$.

(1) Démontrer que $f([1, 2]) \subset [1, 2]$.

(2) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [1, 2]$.

(3) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

(4) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Soit ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(5) Démontrer que $\ell^2 + \ell - 6 = 0$ et en déduire ℓ. Justifier la réponse avec soin.

Correction de l'examen

N'hésitez pas à signaler les inévitables coquilles et à transmettre vos commentaires à Julian Le Clainche ou à Vincent Souveton.

Correction de l'Exercice 0.

A faire **au début** de l'épreuve, pas au moment de rendre sa copie.

Correction de l'Exercice 1.

1. $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$
2. (a) Cette assertion est **FAUSSE**. En effet, si on considère $E = \mathbb{R}^3$, on peut poser $u_1 = u_2 = (0,0,0)$ et $u_3 = (1,0,0)$. La famille (u_1, u_2, u_3) est liée (car elle contient le vecteur nul) mais u_3 ne peut pas être écrit comme combinaison linéaire de u_1 et u_2 (car $u_3 \neq 0_{\mathbb{R}}$).

   (b) Cette assertion est **VRAIE**. Montrons que l'application $g \circ f : E \to G$ est linéaire. Pour $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a
   $$\begin{aligned}(g \circ f)(u + \lambda v) &= g\left(f(u + \lambda v)\right) \\ &= g\left(f(u) + \lambda f(v)\right) \quad \text{car } f \text{ est linéaire} \\ &= g\left(f(u)\right) + \lambda g\left(f(v)\right) \quad \text{car } g \text{ est linéaire}\end{aligned}$$
   $(g \circ f)(u + \lambda v) = (g \circ f)(u) + \lambda (g \circ f)(v)$
   Ainsi, on a montré que $g \circ f$ est linéaire.

   (c) Cette assertion est **FAUSSE**. Considérons par exemple $E = \mathbb{R}^2$. Si on considère $F = \mathrm{Vect}((1,0))$ et $G = \mathrm{Vect}((0,1))$, on $\dim(F) = 1 = \dim(G)$ mais clairement $F \cap G = \{(0,0)\}$ donc en particulier $F \neq G$.
3. (a) $F \cap G \subset G$ donc, d'après un résultat du cours, $\dim(F \cap G) \leq \dim(G)$.

   (b) — Si $G \subset F$, alors $F \cap G = G$ et donc $\dim(F \cap G) = \dim(G)$.
   — Réciproquement, supposons que $\dim(F \cap G) = \dim(G)$. Comme, de plus, $F \cap G \subset G$, alors $F \cap G = G$. Ainsi, $G = F \cap G \subset F$.

Correction de l'Exercice 2.

1. (a) Par définition, la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est génératrice de F. Nous allons prouver qu'elle est également libre :
   $$a \cdot u_1 + b \cdot u_2 + c \cdot u_3 = 0_{\mathbb{R}^4} \iff \begin{cases} a - c = 0 \\ a + b = 0 \\ -a - b + 2c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases}$$
   $$\iff \begin{cases} a = c \\ b = c \\ a = -b = -c \\ -a - b + 2c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$
   Cela montre que (u_1, u_2, u_3) est une base de F (qui est de dimension 3).

(b) D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter toute famille libre d'un espace vectoriel E en une base de cet espace en utilisant des vecteurs d'une famille génératrice de E.

Ici, il est donc possible de compléter la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$, qui est libre dans $\mathbb{R}^4$, en une base de $\mathbb{R}^4$ à l'aide par exemple de vecteurs de la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4).

(c) La famille $\{u_1, u_2, u_3, e_1\}$ contient $4 = \dim \mathbb{R}^4$ vecteurs. Son déterminant dans la base canonique est :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \times (-2 \times 1 - 1 \times 0) = 2 \neq 0$$

Ainsi, (u_1, u_2, u_3, e_1) est une base de $\mathbb{R}^4$. Cela prouve que $\mathrm{Vect}(e_1)$ est un supplémentaire de $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ dans $\mathbb{R}^4$.

2. On commence par trouver une famille génératrice de G :

$$(x, y, z, t) \in G \iff \begin{cases} x - y + t = 0 \\ y + z - 2t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 \times z + 1 \times t \\ y = -1 \times z + 2 \times t \\ z = 1 \times z + 0 \times t \\ t = 0 \times z + 1 \times t \end{cases}$$

Ainsi, la famille $\{v_1, v_2\}$, avec $v_1 = (-1, -1, 1, 0)$ et $v_2 = (1, 2, 0, 1)$, est génératrice de G. De plus, elle est libre, les deux vecteurs qui la composent n'étant pas colinéaires. Par conséquent, (v_1, v_2) est une base de G (qui est de dimension 2).

3. (a) Le vecteur u_1 vérifie les deux équations définissant G : $1-1+0 = 0$ et $1-1-2\times 0 = 0$. Donc $u_1 \in G$.

D'après la formule de Grassmann, $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 4$. Ainsi, $\dim(F + G) = 4 = \dim \mathbb{R}^4$ et $F + G \subset \mathbb{R}^4$, par définition. Donc $F + G = \mathbb{R}^4$.

(b) Le vecteur u_1 appartient à la fois à F et à G donc $F \cap G \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ et les deux sous-espaces F et G ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Correction de l'Exercice 3.

1. En développant par rapport à la première colonne, on trouve

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \times \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times (2 \times 2 - 1 \times 1) + (-1 \times 2 - (-1) \times 1) + (-1 \times 1 - (-1) \times 2) \\ &= 6 - 1 + 1 \end{aligned}$$

$\Delta = 6$.

2. On remarque que Δ est le déterminant dans la base canonique de la famille de $3 = \dim \mathbb{R}^3$ vecteurs $\mathcal{F}$. Or, on a montré que $\Delta = 6 \neq 0$. Ainsi, la famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. On a $f(v_1) = (3, -3, 0) = v_1 - v_2$, $f(v_2) = (0, 0, 0)$ et $f(v_3) = (0, 0, 0)$. La matrice de f dans la base $\mathcal{F}$ est donc donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. On remarque que $\mathrm{Im}(f) \subset \{(a,b,0) \in \mathbb{R}^3 | a,b \in \mathbb{R}\}$. En particulier, on a $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leq 2$ et donc f n'est pas surjective.

   De plus, le théorème du rang nous donne $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathrm{Im}(f)) \geq 1$ et donc f n'est pas injective.
5. On sait que l'image par f d'une base de $\mathbb{R}^3$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. On a donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(v_1), f(v_2), f(v_3)) = \mathrm{Vect}(f(v_1)) = \mathrm{Vect}(v_1 - v_2)$ d'après les calculs de la question 3.

   Ainsi, $\mathrm{Im}(f)$ est un espace vectoriel de dimension 1 et de base $(v_1 - v_2)$.
6. D'après le théorème du rang, on a $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathrm{Im}(f)) = 3 - 1 = 2$.

   (De plus, une base de $\mathrm{Ker}(f)$ est donnée par (v_2, v_3).)

Correction de l'Exercice 4.

1. On se place au voisinage de 0. D'après le cours et par substitution :

$$\ln(1+2x) = 2x - 2x^2 + \frac{8x^3}{3} + o(x^3)$$

   De plus,

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

   Par produit et en éliminant les termes d'ordre supérieur ou égal à 4, qui sont négligeables devant x^3 au voisinage de 0, on obtient finalement :

$$f(x) = 2x + \frac{5x^3}{3} + o(x^3)$$

2. Au voisinage de 0, en multipliant le $\mathrm{DL}_3(0)$ usuel de sinus par -2 :

$$-2\sin(x) = -2x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

   Ainsi, toujours au voisinage de 0, en sommant les DL :

$$f(x) - 2\sin(x) = 2x^3 + o(x^3)$$

   On en déduit que $f(x) - 2\sin(x) \sim 2x^3$ quand $x \to 0$.
3. Quand $n \to +\infty$, $1/n^2 \to 0$. On peut donc appliquer le résultat de la question précédente en remplaçant x par $1/n^2$:

$$u_n = f\left(\frac{1}{n^2}\right) - 2\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{2}{n^6}$$

4. Par produit, $n^\alpha u_n \sim 2n^{\alpha-6}$. Ainsi :
   - si $\alpha < 6$, alors $u_n \to 0$;
   - si $\alpha = 6$, alors $u_n \to 2$;
   - si $\alpha > 6$, alors $u_n \to +\infty$.

Correction de l'Exercice 5.

1. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[1,2]$, on a donc $f([1,2]) = [f(1), f(2)] = [\frac{9}{5}, 2]$. En particulier, on a $f([1,2]) \subset [1,2]$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$: "$u_n \in [1,2]$", on va montrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Initialisation :
   Par définition $u_0 = 1 \in [1,2]$ donc $P(0)$ est vraie.
   Hérédité :
   Soit $n \geq 0$, on suppose $P(n)$ vraie.
   On a d'une part $u_{n+1} = f(u_n)$ or $u_n \in [1,2]$ par hypothèse de récurrence et donc, d'après la question précédente, on a $u_{n+1} \in [1,2]$
   Ainsi, on a $P(n+1)$ vraie.
   Conclusion :
   Finalement, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. On pose $g : [1,2] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = f(x) - x = 3 - x - \frac{6}{x+4}$.
   La fonction g est dérivable et pour $x \in [1,2]$, on a $g'(x) = -1 + \frac{6}{(x+4)^2}$. On remarque que pour $x \in [1,2]$, $g'(x) \leq 0$ donc g est décroissante et pour $x \in [1,2]$, on a $g(x) \geq g(2) = 0$.
   Or, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$ et d'après la question précédente $u_n \in [1,2]$. On a donc
   $$u_{n+1} - u_n = g(u_n) \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.
4. D'après les questions précédentes, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, elle est donc convergente.
5. Par définition, on a $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. La fonction f étant continue, on peut passer à la limite dans cette égalité et on trouve $\ell = f(\ell)$.
   Or $\ell = f(\ell) \iff \ell - 3 + \frac{6}{\ell+4} = 0 \iff \ell^2 + \ell - 6 = 0$.
   Les solutions de cette équation sont $\ell = 2$ et $\ell = -3$. Or, on sait que $u_n \in [1,2], \forall n \in \mathbb{N}$ donc $\ell \in [1,2]$ et nécessairement $\ell = 2$.