CC1 de Mathématiques S2

Groupes MP2 & Double Licence MP - 9 février 2024

Exercice 1. (/5) *Cours et applications directes.*

(a) Donner la formule de Taylor-Young à l'ordre 4 pour une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ en précisant les hypothèses sur f pour pouvoir l'utiliser.

(b) Donner le développement limité à l'ordre 5 de la fonction $x \mapsto \cos(x)$ au voisinage de 0.

(c) Montrer que $\sin(x) = o(x^3)$ au voisinage de $+\infty$.

(d) Montrer que $\exp(x) - 1 \sim x$ au voisinage de 0.

Exercice 2. (/5) Pour tout $x \in \mathbf{R}\backslash\{1\}$, on pose $g(x) = \dfrac{\exp(x)}{1-x}$.

(a) Montrer que le développement limité de g à l'ordre 2 au voisinage de 0 s'écrit $g(x) \underset{0}{=} 1+2x+\dfrac{5x^2}{2}+o(x^2)$.

(b) Donner, en justifiant, les valeurs de $g(0)$, $g'(0)$, $g''(0)$ sans calculer les dérivées successives de g.

(c) Donner, en justifiant, un équivalent simple de $h(x) = \dfrac{g(-x) - 1 + 2x}{3\sin(x^4)}$ au voisinage de 0.

(d) En déduire, si elle existe, la limite de $h(x)$ quand x tend vers 0.

Correction des exercices

Correction de l'Exercice 1.

(a) Pour une fonction f qui est **4 fois dérivable au voisinage de $\mathbf{x_0}$** $\in\mathbf{R}$, la formule de Taylor-Young à l'ordre 4 au voisinage de x_0 s'écrit :

$$f(x) \underset{x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3 + \frac{f''''(x_0)}{24}(x-x_0)^4 + o((x-x_0)^4)$$

(b) C'est un DL usuel, il faut le mettre au bon ordre en notant que la fonction cosinus n'admet que des termes d'ordre pair dans sa partie régulière :

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

(c) La fonction sin est bornée entre -1 et 1 sur $\mathbf{R}$. Ainsi, pour tout $x > 0$:

$$\frac{-1}{x^3} \leq \frac{\sin(x)}{x^3} \leq \frac{1}{x^3}$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0$. Donc, par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x^3} = 0$ et $\sin(x) = o(x^3)$ au voisinage de $+\infty$.

(d) Posons $k(x) = \exp(x)$ pour $x \in \mathbf{R}$. La fonction k est dérivable en 0 et, par définition, on a :

$$\frac{\exp(x)-1}{x} = \frac{k(x)-k(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} k'(0),$$

par définition du nombre dérivé. Or, on sait que, pour $x \in \mathbf{R}$, on a $k'(x) = \exp(x)$ et, finalement :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = k'(0) = \exp(0) = 1$$

On a donc montré que $\exp(x) - 1 \sim x$ au voisinage de 0.

On peut aussi tout simplement dire que, d'après les DL usuels au voisinage de 0, $\exp(x) - 1 \underset{0}{=} x + o(x)$. *Or, une fonction est équivalente en* 0 *au premier terme non nul de son* $DL(0)$. *D'où le résultat.*

Correction de l'Exercice 2.

(a) g est le produit de deux fonctions dont les $\mathrm{DL}_2(0)$ sont (presque) usuels :

$$\exp(x) \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
$$\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + o(x^2)$$

On fait alors le produit de ces DL :

$$\begin{aligned}
\frac{\exp(x)}{1-x} &\underset{0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)\left(1 + x + x^2\right) + o(x^2) \\
&\underset{0}{=} 1 + x + x^2 + x + x^2 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\
&\underset{0}{=} 1 + 2x + \frac{5x^2}{2} + o(x^2)
\end{aligned}$$

On fait le produit des parties régulières en omettant les termes de degré 3 *ou plus, qui sont négligeables devant* x^2. *Enfin, on n'oublie pas d'ajouter le petit o.*

(b) La fonction g est **2 fois dérivable au voisinage de 0**, comme produit de deux fonctions qui le sont. Donc on peut lui appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 au voisinage de 0 :

$$g(x) \underset{0}{=} g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$$

Par **unicité du DL**, on peut identifier les coefficients de la formule de Taylor-Young avec ceux obtenus dans le DL de la question (a). Ainsi, $g(0) = 1$, $g'(0) = 2$ et $g''(0) = 5$.

(c) Il s'agit de trouver un équivalent simple du numérateur, puis un équivalent simple du dénominateur, et de conclure par quotient d'équivalents. Par substitution et addition de DL, on a :

$$\begin{aligned} g(-x) - 1 + 2x &\underset{0}{=} \left(1 - 2x + \frac{5x^2}{2}\right) - 1 + 2x + o(x^2) \\ &\underset{0}{=} \frac{5x^2}{2} + o(x^2) \end{aligned}$$

Donc $g(-x) - 1 + 2x \sim \dfrac{5x^2}{2}$ au voisinage de 0. Par substitution toujours et multiplication par un nombre réel, on a :

$$3\sin(x^4) \underset{0}{=} 3x^4 + o(x^4)$$

Donc $3\sin(x^4) \sim 3x^4$ au voisinage de 0. *Il est inutile de pousser les DL plus loin : une fonction est équivalente en 0 au premier terme non nul de son DL(0). Donc on peut s'arrêter à l'ordre 2 pour le numérateur et à l'ordre 4 pour le dénominateur.* Ainsi, par quotient d'équivalents :

$$h(x) = \frac{g(-x) - 1 - 2x}{3\sin(x^4)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{5x^2}{2 \times 3x^4} = \frac{5}{6x^2}$$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5}{6x^2} = +\infty$. La limite cherchée est donc $+\infty$.