Contrôle continu 1 - Mathématiques

Groupe MP1 - 9 Février 2023

Le barème est donné à titre indicatif.
Il sera tenu compte de la rédaction dans l'évaluation, en particulier **toute réponse devra être justifiée avec soin** (aucun point ne sera donné à une réponse juste non justifiée)
L'utilisation de la calculatrice ou de tout autre appareil électronique est interdite.

Exercice 1 [8 pts]

1. Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $x \mapsto 1 - x^2 + x^3$.
2. Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.
3. Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $x \mapsto \sin(x)$.
4. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $x \mapsto \exp(x)$.
5. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$.
6. Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.
7. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Donner la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en 0 pour f en précisant les hypothèses nécessaires sur f.

Exercice 2 [5 pts]

1. Montrer que $\cos(x) = o(x^2)$ en $+\infty$.
2. Montrer que $\ln(1+x) - x = o(x)$ en 0.
3. Montrer que $x\sin(2x) \sim 2x^2$ en 0.
4. Montrer que $\ln(x) = o(x)$ en 1.

Exercice 3 [7 pts]

Soit $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \tan(x)$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

1. Montrer que le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$ est donné par
$$\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$
2. Montrer que le développement limité à l'ordre 2 en 0 de f est donné par
$$f(x) = x + o(x^2).$$
3. En déduire les valeurs de $f(0)$, $f'(0)$ et $f''(0)$ (sans calculer les dérivées successives de f). Justifier votre réponse.
4. Déterminer si elle existe la limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x^2}$.

Correction

Proposée par J. Le Clainche

Correction exercice 1

1. Le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $x \mapsto 1 - x^2 + x^3$ est donné par
$$1 - x^2 + x^3 = 1 - x^2 + x^3 + o\left(x^4\right).$$
2. Au voisinage de 0, on a
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o\left(x^4\right).$$
3. Au voisinage de 0, on a
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right).$$
4. Au voisinage de 0, on a
$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right).$$
5. Au voisinage de 0, on a
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right).$$
6. Pour $x > -1$, on a $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$, ainsi, au voisinage de 0, on a
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)}{2}x^2 + o(x^2) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + o(x^2).$$
7. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ <u>et 3 fois dérivable en 0</u>. D'après la formule de Taylor-Young, au voisinage de 0
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + o\left(x^3\right).$$

Correction exercice 2

1. Pour $x \in \mathbf{R}$, on a $-1 \leq \cos(x) \leq 1$. Ainsi, pour $x \geq 0$, on a $-\frac{1}{x^2} \leq \frac{\cos(x)}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$.
   Or, on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{x^2} = 0$.
   Finalement, par théorème d'encadrement, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} = 0$ et donc, on a montré que
$$\cos(x) = o\left(x^2\right) \text{ en } +\infty.$$
2. Au voisinage de 0, on a $\ln(1+x) = x + o(x)$ et donc $\ln(1+x) - x = o(x)$.
3. On sait que $\sin(x) \sim x$ en 0. Ainsi, on a $\sin(2x) \sim 2x$ en 0 et finalement $x\sin(2x) \sim 2x^2$ au voisinage de 0.
4. On a $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(1)}{1} = 0$ et donc $\ln(x) = o(x)$ en 1.

Correction exercice 3

1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$ est un quotient. Pour en déterminer le DL, on doit commencer par écrire $\cos(x)$ sous la forme $\cos(x) = 1 + q(x) + o(x^2)$ au voisinage de 0 et un DL de $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$ sera alors donné par

$$\frac{1}{\cos(x)} = 1 - q(x) + q(x)^2 + o_0\left(x^2\right).$$

Le DL de cos en 0 à l'ordre 2 est

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right).$$

On a donc

- $q(x) = -\frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$;
- $q(x)^2 = o\left(x^2\right)$.

Ainsi, au voisinage de 0 on a

$$\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right).$$

2. Pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \sin(x) \times \frac{1}{\cos(x)}$ et on reconnaît le produit de deux fonctions dont on connaît un DL en 0 à l'ordre 2. Au voisinage de 0, on a

$$\sin(x) = x + o\left(x^2\right)$$
$$\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$$

La partie régulière du DL à l'ordre 2 en 0 de f est alors donnée par le produit des parties régulières des deux DL ci-dessus et on a

$$f(x) = x + o\left(x^2\right).$$

3. La fonction f est 2 fois dérivable en 0. D'après la formule de Taylor-Young, au voisinage de 0

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o\left(x^2\right).$$

Ainsi, par unicité du DL de f en 0 à l'ordre 2, on a $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ et $f''(0) = 0$.

4. D'après la question 2, on a $\tan(x) \sim x$ en 0 et donc par quotient d'équivalents, on a $\dfrac{\tan(x)}{x^2} \sim \dfrac{1}{x}$ en 0.

Or $\frac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0 et donc $\dfrac{\tan(x)}{x^2}$ n'admet pas de limite en 0.