CC2 de Mathématiques S2

Groupes MP2 & Double Licence MP - 5 mars 2024

Vincent Souveton

Commencez par écrire votre nom sur la copie !!! Les durées annoncées au début de chaque exercice sont indicatives et ne prennent pas en compte un éventuel tiers-temps. Sauf mention contraire, toutes les réponses doivent être rigoureusement justifiées. Jusqu'à deux points de malus pourront être appliqués si la copie n'est pas soignée.

Exercice 1. (/4) *Cours et applications directes - environ 5 minutes.*

1. Écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en 0 pour une fonction f, en précisant les hypothèses nécessaires sur f pour appliquer ce résultat.
2. Donner, en justifiant, deux fonctions f_1 et f_2 telles que $f_1 \underset{+\infty}{\sim} f_2$ mais $\exp(f_1) \underset{+\infty}{\not\sim} \exp(f_2)$.
3. Est-ce que $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y = 1\}$, muni de la somme et du produit externe usuels de $\mathbf{R}^2$, est un espace vectoriel ? Justifier.

Exercice 2. (/7) *Analyse asymptotique et développements limités - environ 25 minutes.*

Soit g la fonction définie sur $\mathcal{D}_g$ par $g(x) = \cos(2x)\sqrt{1+x}$.

1. Préciser, sans justification, les domaines de définition $\mathcal{D}_g$ et de dérivabilité $\mathcal{D}'_g$ de la fonction g.
2. Calculer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de la fonction g.
3. En déduire une équation de la tangente à la courbe représentative de g en 0. Au voisinage de 0, cette droite tangente est-elle au-dessus ou en-dessous de la courbe représentative de g ?
4. Donner, en justifiant et sans les calculer directement, les valeurs de $g(0)$, $g'(0)$ et $g''(0)$.
5. Donner, en justifiant, un équivalent simple de $h(x) = \dfrac{g(x) - 1 - \frac{x}{2}}{\ln(1-2x)}$ au voisinage de 0.
6. En déduire, si elle existe, la limite de $h(x)$ quand x tend vers 0.

Exercice 3. (/9) *Espaces vectoriels - environ 30 minutes.*

Dans tout l'exercice, on se place dans l'espace des matrices carrées $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, muni de sa somme et de son produit externe usuels $(+, \cdot)$, et on considère les deux sous-ensembles suivants : $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \; ; \; a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} d & 0 \\ 2d & 3d \end{pmatrix} \; ; \; d \in \mathbf{R} \right\}$. On admet que $(G, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbf{R}), +, \cdot)$.

1. Donner, sans justification, un exemple de matrice $A \in F$ et un exemple de matrice $B \in G$, avec $A \neq B$.
2. Montrer que $(F, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbf{R}), +, \cdot)$.
3. Donner, en justifiant, une base de $(F, +, \cdot)$.
4. Montrer que $(F, +, \cdot)$ et $(G, +, \cdot)$ sont en somme directe.
5. Montrer que $(F, +, \cdot)$ et $(G, +, \cdot)$ sont supplémentaires dans $(\mathcal{M}_2(\mathbf{R}), +, \cdot)$.
6. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & \ln(3) \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Trouver $M_F \in F$ et $M_G \in G$ telles que $M = M_F + M_G$. Cette écriture de M comme somme d'une matrice de F et d'une matrice de G est-elle unique ?

Correction des exercices

Correction de l'Exercice 1.

1. Pour une fonction f qui est **3 fois dérivable au voisinage de 0**, la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 0 s'écrit :

$$f(x) \underset{0}{=} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + o(x^3)$$

2. On peut prendre les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par $f_1(x) = x + 1$ et $f_2(x) = x$.

En effet, pour tout réel $x \neq 0$, on a :

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

ce qui montre que $f_1 \underset{+\infty}{\sim} f_2$. En revanche, pour tout réel x,

$$\frac{\exp(f_1(x))}{\exp(f_2(x))} = \frac{\exp(x+1)}{\exp(x)} = \frac{\exp(x) \times \exp(1)}{\exp(x)} = \exp(1) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(1) \neq 1,$$

et donc $\exp(f_1) \underset{+\infty}{\not\sim} \exp(f_2)$.

3. Puisque $E \subset \mathbf{R}^2$, alors E muni de la somme et du produit externe usuels de $\mathbf{R}^2$ est un espace vectoriel si et seulement si c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$. Or, $0_{\mathbf{R}^2} = (0,0) \notin E$ car $0 + 0 \neq 1$. Donc E n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$, et donc pas un espace vectoriel.

Correction de l'Exercice 2.

1. On a $\mathcal{D}_g = [-1, +\infty[$ et $\mathcal{D}'_g =]-1, +\infty[$.

2. g est le produit de deux fonctions dont les $\mathrm{DL}_2(0)$ sont (presque) usuels. Par DL usuels et substitution,

$$\cos(2x) \underset{0}{=} 1 - 2x^2 + o(x^2),$$

et d'après les DL usuels,

$$\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2).$$

Ainsi, par produit de DL :

$$\begin{aligned} g(x) &= \cos(2x)\sqrt{1+x} \\ &\underset{0}{=} \left(1 - 2x^2\right)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right) + o(x^2) \\ &\underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{17x^2}{8} + o(x^2) \end{aligned}$$

On fait le produit des parties régulières en omettant les termes de degré 3 ou plus, qui sont négligeables devant x^2. Enfin, on n'oublie pas d'ajouter le petit o.

3. D'après la question précédente, $g(x) \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} + o(x)$ donc la tangente à la courbe représentative de g en 0 a pour équation $y = 1 + \frac{x}{2}$. De plus, le premier coefficient d'ordre strictement supérieur à 1 intervenant dans le DL de cette fonction est $\frac{-17}{8}x^2$. Il s'agit d'un terme d'ordre pair précédé d'un coefficient négatif : la tangente est donc au-dessus de la courbe représentative de g au voisinage de 0.

4. La fonction g est **2 fois dérivable au voisinage de 0**, comme produit de deux fonctions qui le sont. Donc on peut lui appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 au voisinage de 0 :

$$g(x) \underset{0}{=} g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$$

Par **unicité du DL**, on peut identifier les coefficients de la formule de Taylor-Young avec ceux obtenus dans le DL de la question 2. Ainsi, $g(0) = 1$, $g'(0) = 1/2$ et $g''(0) = -17/4$.

5. Il s'agit de trouver un équivalent simple du numérateur, puis un équivalent simple du dénominateur, et de conclure par quotient d'équivalents. Pour cela, on utilisera qu'une fonction équivaut en 0 au premier terme non nul de son DL(0). Par addition de DL, on a :

$$\begin{aligned} g(x) - 1 - \frac{x}{2} &\underset{0}{=} \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{17x^2}{8}\right) - 1 + \frac{x}{2} + o(x^2) \\ &\underset{0}{=} \frac{-17x^2}{8} + o(x^2) \end{aligned}$$

Donc $g(x) - 1 + \dfrac{x}{2} \sim \dfrac{-17x^2}{8}$ au voisinage de 0. Par substitution, on a :

$$\ln(1-2x) \underset{0}{=} -2x + o(x)$$

Donc $\ln(1-2x) \sim -2x$ au voisinage de 0. Ainsi, par quotient d'équivalents :

$$h(x) = \frac{g(x) - 1 - \frac{x}{2}}{\ln(1-2x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-17x^2}{-8 \times 2x} = \frac{17x}{16}$$

6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \frac{17x}{16} = 0$. La limite cherchée est donc 0.

Correction de l'Exercice 3.

1. On peut prendre par exemple $A = \begin{pmatrix} -2 & \pi \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Pour cela, il faut montrer que F est non vide et stable par somme et produit externe.

   - $0_{\mathcal{M}_2(\mathbf{R})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in F$ car elle peut s'écrire sous la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ avec $a = b = c = 0$. Donc F est non vide.
   - Soient $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} \in F$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors, $\lambda \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda b + b' \\ 0 & \lambda c + c' \end{pmatrix} \in F$. Donc F est stable par somme et produit externe.

   Ainsi, $(F, +, \cdot)$ est bien un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbf{R}), +, \cdot)$.

3. Une matrice M est dans F si et seulement s'il existe des réels a, b et c tels que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, c'est-à-dire si et seulement s'il existe des réels a, b et c tels que :

$$M = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Ainsi, la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ de trois vecteurs de F est génératrice de cet espace.

De plus, cette famille est libre car :

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

En conclusion, $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $(F, +, \cdot)$ *(qui est donc de dimension 3)*.

4. Soit $M \in F \cap G$. Alors, il existe $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ tels que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 2d & 3d \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$\begin{cases} a = d \\ b = 0 \\ 0 = 2d \\ c = 3d \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

   On a montré que $F \cap G = \left\{ 0_{\mathcal{M}_2(\mathbf{R})} \right\}$ et il suit, par définition, que $(F, +, \cdot)$ et $(G, +, \cdot)$ sont en somme directe.

5. Puisqu'on a montré à la question précédente que $F \cap G = \left\{ 0_{\mathcal{M}_2(\mathbf{R})} \right\}$, il reste à monter que $\mathcal{M}_2(\mathbf{R}) = F + G$. On a immédiatement $F + G \subset \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, F et G étant des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Reste à montrer que $\mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \subset F + G$, c'est-à-dire que toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ peut s'écrire comme somme d'une matrice de F et d'une matrice de G. On raisonne par analyse-synthèse.

   Analyse : Soit $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ telle que $N = N_F + N_G$, avec $N_F = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in F$ et $N_G = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 2d & 3d \end{pmatrix} \in G$. *Il s'agit donc de trouver les expressions des coefficients qui interviennent dans la décomposition, c'est-à-dire a, b, c et d, en fonction des coefficients x, y, z et t.* Cela équivaut à :

$$\begin{cases} x = a + d \\ y = b \\ z = 2d \\ t = c + 3d \end{cases} \iff \begin{cases} a = x - d \\ b = y \\ d = \frac{z}{2} \\ c = t - 3d \end{cases} \iff \begin{cases} b = y \\ d = \frac{z}{2} \\ a = x - \frac{z}{2} \\ c = t - \frac{3z}{2} \end{cases}$$

   Synthèse : Soit $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. On a alors :

$$N = \underbrace{\begin{pmatrix} x - \frac{z}{2} & y \\ 0 & t - \frac{3z}{2} \end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{z}{2} & 0 \\ z & \frac{3z}{2} \end{pmatrix}}_{\in G}$$

   Ainsi, toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ peut s'écrire comme somme d'une matrice de F et d'une matrice de G. Donc $\mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \subset F + G$ et comme on a trivialement $F + G \subset \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, alors $\mathcal{M}_2(\mathbf{R}) = F + G$. D'après la question précédente, on a aussi $F \cap G = \left\{ 0_{\mathcal{M}_2(\mathbf{R})} \right\}$. Ceci achève donc de montrer que $(F, +, \cdot)$ et $(G, +, \cdot)$ sont supplémentaires dans $(\mathcal{M}_2(\mathbf{R}), +, \cdot)$. On peut alors écrire $\mathcal{M}_2(\mathbf{R}) = F \oplus G$.

6. En posant $M_F = \begin{pmatrix} 0 & \ln(3) \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \in F$ et $M_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in G$, on a bien $M = M_F + M_G$. Cette écriture de M comme somme d'une matrice de F et d'une matrice de G est unique, les espaces $(F, +, \cdot)$ et $(G, +, \cdot)$ étant supplémentaires dans $(\mathcal{M}_2(\mathbf{R}), +, \cdot)$ *- en fait, en somme directe suffit pour assurer l'unicité*.