Contrôle continu 1 - Mathématiques

Groupe MP1 - 6 Mars 2023

Durée : 45 minutes

Le barème est donné à titre indicatif.

Présentation et Rédaction [2 pts]

Exercice 1 [4 pts]

1. Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$.
2. Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction g définie sur $[-1,+\infty[$ par $g(x)=\sqrt{1+x}$.
3. Soit E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F\cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.
4. Étant donnés deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E, rappeler la définition de $F+G$ en recopiant et complétant l'égalité suivante sur votre copie :

$$F+G=\{\qquad\qquad\qquad\}.$$

Exercice 2 [8 pts]

Soit f et g les fonctions définies par $f(x)=e^{x^2}\cos(x)$ pour $x\in\mathbb{R}$ et $g(x)=\sin(2x)\ln(1+x)$ pour $x\in]-1,+\infty[$.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction f.
2. (a) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.
   (b) Déterminer la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0.
3. Déterminer un équivalent simple en 0 de $f(x)-1-\frac{x^2}{2}$.
4. Montrer que le développement limité à l'ordre 3 en 0 de g est donné par

$$g(x)=2x^2-x^3+o(x^3)\text{ en }0.$$

5. En déduire les valeurs de $g(0),\ g'(0),\ g''(0)$ et $g'''(0)$ (sans calculer les dérivées successives de g).
6. Déterminer, si elle existe, la valeur de la limite suivante

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}\cos(x)-1-\frac{x^2}{2}}{\sin(2x)\ln(1+x)}.$$

Exercice 3 [6+1 pts]

1. Dire si les ensembles suivants (munis des lois + et $\cdot$ usuelles, rappelées en cours) sont des espaces vectoriels. Justifier la réponse.
   (a) $E_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}\mid yz=0\}$,
   (b) $E_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}\mid z+x=0\}$,
   (c) $E_3=\{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\mid f(x)=f'(x),\ \forall x\in\mathbb{R}\}$.
2. On considère $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}\mid z+x=0\}$ et $G=\{(a,a,0)\mid a\in\mathbb{R}\}$. On admet que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Montrer que $F\cap G=\{0_E\}$.
   (b) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
   (c) **(Bonus)** Soit $u=(0,0,1)$. Déterminer $u_F\in F$ et $u_G\in G$ tels que $u=u_F+u_G$. Cette écriture est-elle unique ?

Correction

Proposée par J. Le Clainche

Correction exercice 1

1. Au voisinage de 0, on a
$$f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o\left(x^4\right).$$
2. Au voisinage de 0, on a
$$g(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o\left(x^2\right).$$
3. Montrons que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.
   - On a $0_E \in F$ et $0_E \in G$ car F et G sont des sous-espaces vectoriels de E. Ainsi $0_E \in F \cap G$ et donc $F \cap G \neq \emptyset$.
   - Soient $u, v \in F \cap G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   D'une part, on a $u, v \in F$ et F étant un sous-espace vectoriel de E, on a $\lambda u + v \in F$
   D'autre part, on a de même $\lambda u + v \in G$.
   Ainsi, $\lambda u + v \in F \cap G$ donc $F \cap G$ est stable par combinaison linéaire.
   Finalement on a montré que $F \cap G$ est non-vide et stable par combinaison linéaire donc $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.
4. On a
$$F + G = \{f + g \mid f \in F,\ g \in G\}.$$

Correction exercice 2

1. Au voisinage de 0, on a $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$ et par substitution, on a donc $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$ en 0.
Au voisinage de 0, on a $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$.
Par produit de développements limités, on obtient alors
$$f(x) = (1 + x^2 + \frac{x^4}{2})(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}) + o(x^4) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \text{ en } 0.$$
2. (a) On a montré que $f(x) = 1 + o(x)$ au voisinage de 0, donc la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 1$.
   (b) De plus, la fonction admet un $\mathrm{DL}_2(0)$ donné par $f(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Comme 2 est pair et $\frac{1}{2}$ est positif, alors la courbe représentative de f est au-dessus de sa tangente en 0.
3. Au voisinage de 0, on a $f(x) - 1 - \frac{x^2}{2} = \frac{x^4}{24} + o(x^4)$. Or une fonction est équivalente en 0 au premier terme non nul de son développement limité en 0.
Ainsi, $f(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \sim \frac{x^4}{24}$ en 0.
4. Au voisinage de 0, on a $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$ et $\sin(y) = y - \frac{y^3}{6} + o\left(y^3\right)$. Par substitution, on a donc $\sin(2x) = 2x - \frac{8x^3}{6} + o(x^3)$ en 0.
Ainsi, par produit, on obtient
$$g(x) = (2x - \frac{8x^3}{6})(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}) + o(x^3) = 2x^2 - x^3 + o(x^3).$$
5. La fonction g est 3 fois dérivable en 0. D'après la formule de Taylor-Young, au voisinage de 0
$$g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + \frac{g'''(0)}{6}x^3 + o\left(x^3\right).$$
Ainsi, par unicité du DL de g en 0 à l'ordre 3, on a $g(0) = 0,\ g'(0) = 0,\ g''(0) = 4$ et $g'''(0) = -6$.

6. D'après les questions précédentes, on a $e^{x^2}\cos(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \sim \frac{x^4}{24}$ et $\sin(2x)\ln(1+x) \sim 2x^2$ en 0. Ainsi, par quotient d'équivalents, on a
$$\frac{e^{x^2}\cos(x) - 1 - \frac{x^2}{2}}{\sin(2x)\ln(1+x)} \sim \frac{x^2}{48} \text{ en } 0$$
et donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2}\cos(x)-1-\frac{x^2}{2}}{\sin(2x)\ln(1+x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{48} = 0$.

Correction exercice 3

1. (a) Soient $u = (0,1,0)$ et $v = (0,0,1)$, on a clairement $u \in E_1$ et $v \in E_1$ (car $0\times 1 = 0$). Or $u+v = (0,1,1) \notin E_1$ (car $1 \times 1 \neq 0$) donc E_1 n'est pas stable pour l'addition et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   (b)
   - On a $0 + 0 = 0$ donc $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in E_2 \neq \emptyset$
   - Soient $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $u_2 = (x_2, y_2, z_2)$ deux éléments de E_2 et $\lambda \in \mathbb{R}$.
     On pose $v = u_1 + \lambda u_2 = (x, y, z)$.
     On a $z + x = (z_1 + \lambda z_2) + (x_1 + \lambda x_2) = z_1 + x_1 + \lambda(z_2 + x_2) = 0$ car $u_1, u_2 \in E_2$
     Donc $v \in E_2$ et E_2 est stable par combinaison linéaire.

   Ainsi E_2 est non-vide et stable par combinaison linéaire donc E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   (c)
   - Soit $f_0 = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ la fonction nulle sur $\mathbb{R}$. On a $f_0'(x) = 0 = f_0(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc $f_0 \in E_3 \neq \emptyset$.
   - Soient $f, g \in E_3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a
   $$(\lambda f + g)'(x) = \lambda f'(x) + g'(x) = \lambda f(x) + g(x) = (\lambda f + g)(x).$$
     Ainsi $\lambda f + g \in E_3$ et E_3 est stable par combinaisons linéaires

   On a donc montré que E_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. (a) Soit $u = (x, y, z) \in F \cap G$. On a $u \in G$ donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $x = a,\ y = a$ et $z = 0$. De plus, $u \in F$ donc $x = -z = 0$ et finalement, on a $u = (0,0,0) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et donc $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
   (b) On raisonne par analyse-synthèse pour montrer que $F + G = \mathbb{R}^3$
   Analyse
   Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on suppose que $u = u_F + u_G$ avec $u_F = (\alpha, \beta, -\alpha) \in F$ et $u_G = (a, a, 0) \in G$.
   On a alors $\begin{cases} x = a + \alpha \\ y = a + \beta \\ z = -\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -z \\ a = x - \alpha = x + z \\ \beta = y - a = y - x - z \end{cases}$
   Synthèse
   Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on pose $u_F = (-z, y - x - z, z)$ et $u_G = (x + z, x + z, 0)$.
   $\to$ On a $u = u_F + u_G$,
   $\to$ Clairement, $u_F \in F$ et $u_G \in G$.
   On a donc $\mathbb{R}^3 = F + G$.
   On a donc montré que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
   (c) On considère $u = (0,0,1)$, en utilisant la question précédente, on trouve que $u = (-1,-1,1) + (1,1,0)$ avec $u_F = (-1,-1,1) \in F$ et $u_G = (1,1,0) \in G$.
   Cette écriture est unique car F et G sont en somme directe.