CC3 de Mathématiques S2

Groupes MP2 & Double Licence MP - 2 avril 2024

Commencez par écrire votre nom sur la copie !!! Les durées annoncées au début de chaque exercice sont indicatives et ne prennent pas en compte un éventuel tiers-temps. Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1. (/4) *Cours et applications directes - environ 10 minutes.*

1. Écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 5 en 0 pour une fonction f, en précisant les hypothèses nécessaires sur f pour appliquer ce résultat.
2. Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $x \mapsto \sin(-3x)$.
3. Soit E et F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Exercice 2. (/8) *Applications linéaires - environ 20 minutes.*

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$ muni de ses opérations usuelles et on définit, pour tout vecteur $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, l'application suivante :

$$\varphi(x, y, z) = (x + z, 2x + 2z, x - y)$$

1. Montrer que φ est une application linéaire.
2. Écrire, en justifiant, la matrice M de l'application linéaire φ dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
3. Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Im}(\varphi)$.
4. En déduire, en énonçant un résultat précis (avec hypothèses !) du cours, la dimension de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
5. L'application φ est-elle injective ? Est-elle surjective ? Justifier.
6. Montrer que le vecteur $(1, 1, -1) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.
7. En déduire, en justifiant, une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
8. Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathrm{Im}(\varphi) = \mathbf{R}^3$.

Correction des exercices

Correction de l'Exercice 1.

1. Pour une fonction f qui est **5 fois dérivable au voisinage de 0**, la formule de Taylor-Young à l'ordre 5 au voisinage de 0 s'écrit :

$$f(x) \underset{0}{=} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{120}x^5 + o(x^5)$$

2. Par DL usuel et substitution,

$$\begin{aligned}\sin(-3x) &\underset{0}{=} (-3x) - \frac{(-3x)^3}{6} + o(x^4)\\ &\underset{0}{=} -3x + \frac{9}{2}x^3 + o(x^4).\end{aligned}$$

3. On utilise la caractérisation usuelle d'un sous-espace vectoriel pour $\mathrm{Im}(f) \overset{\text{déf}}{=} \{f(x) \mid x \in E\} \subset F$.

   - Puisque f est linéaire, alors $0_F = f(0_E) \in \mathrm{Im}(f)$.
   - Soient y_1 et y_2 des vecteurs de $\mathrm{Im}(f)$. Soit λ un réel. On veut montrer que $y_1 + \lambda y_2 \in \mathrm{Im}(f)$. Par définition de l'image, il existe x_1 et x_2 des vecteurs de E tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}y_1 + \lambda y_2 &= f(x_1) + \lambda f(x_2)\\ &\overset{f \text{ linéaire}}{=} f(x_1 + \lambda x_2) \in \mathrm{Im}(f).\end{aligned}$$

   Ainsi, $\mathrm{Im}(f) \subset F$ est non vide et stable par combinaison linéaire. C'est donc un sous-espace vectoriel de F.

Correction de l'Exercice 2.

1. Soient $(x, y, z),\ (x', y', z') \in \mathbf{R}^3$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}\varphi((x,y,z) + \lambda(x',y',z')) &= \varphi(x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z')\\ &= (x + \lambda x' + z + \lambda z', 2x + 2\lambda x' + 2z + 2\lambda z', x + \lambda x' - y - \lambda y')\\ &= (x + z, 2x + 2z, x - y) + \lambda(x' + z', 2x' + 2z', x' - y')\\ &= \varphi(x,y,z) + \lambda\varphi(x',y',z').\end{aligned}$$

   Ainsi, φ est bien une application linéaire.

2. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

$$\begin{aligned}\varphi(e_1) &= \varphi(1,0,0) = (1,2,1) = 1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3\\ \varphi(e_2) &= \varphi(0,1,0) = (1,2,0) = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 - 1 \cdot e_3\\ \varphi(e_3) &= \varphi(0,0,1) = (0,0,-1) = 1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3.\end{aligned}$$

   On en déduit que $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. On sait, d'après un résultat du cours, que $\{\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)\}$ forme une famille génératrice de $\mathrm{Im}(\varphi)$. Or, $\varphi(e_1) = \varphi(e_3) - \varphi(e_2)$. Donc :

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)) = \mathrm{Vect}(\varphi(e_2), \varphi(e_3)).$$

Ainsi, $\{\varphi(e_2), \varphi(e_3)\}$ forme une famille génératrice de $\mathrm{Im}(\varphi)$ mais aussi une famille libre car les deux vecteurs qui la composent ne sont pas colinéaires. Par conséquent, $(\varphi(e_2), \varphi(e_3))$ est une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$. Le cardinal de cette famille est la dimension de l'espace. Donc $\dim(\mathrm{Im}(\varphi) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{rg}(\varphi) = 2$.

4. φ est une application linéaire dont l'espace de départ est de dimension finie ($\dim \mathbf{R}^3 = 3$). On peut alors appliquer le théorème du rang :

$$\dim \mathbf{R}^3 = \dim \mathrm{Ker}(\varphi) + \mathrm{rg}(\varphi) \iff \dim \mathrm{Ker}(\varphi) = 3 - 2 = 1.$$

5. Puisque $\dim \mathrm{Ker}(\varphi) = 1 \neq 0$, alors $\mathrm{Ker}(\varphi) \neq \{0_{\mathbf{R}^3}\}$ et l'application n'est pas injective. Comme c'est un endormorphisme, elle n'est pas non plus surjective.

6. On a $\varphi(1, 1, -1) = (0, 0, 0)$ donc $(1, 1, -1) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.

7. $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est de dimension 1. Il suffit donc de trouver une famille à 1 élément de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ qui forme une famille libre, c'est-à-dire une famille à 1 élément non nul de $\mathrm{Ker}(\varphi)$. D'après la question précédente, par exemple, $((1, 1, -1))$ est une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

8. On vérifie que la concaténation d'une base $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et d'une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$ forme une base de $\mathbf{R}^3$. On s'assure donc ici que la famille $\{(1, 1, -1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)\}$ est une base de $\mathbf{R}^3$. Puisqu'elle compte $3 = \dim \mathbf{R}^3$ vecteurs, alors il suffit de montrer par exemple qu'elle est libre. Soient $a, b, c \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} a(1, 1, -1) + b\varphi(e_2) + c\varphi(e_3) = 0_{\mathbf{R}^3} &\iff \begin{cases} a + b = 0 \\ a + 2b = 0 \\ -a - c = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La famille de $3 = \dim \mathbf{R}^3$ est libre donc c'est une base de $\mathbf{R}^3$. En conclusion, $\mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathrm{Im}(\varphi) = \mathbf{R}^3$.