Contrôle continu 3 - Mathématiques

Groupe MP1

Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 [4 pts]

1. Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $x \mapsto \sin(x)$.
2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $F,\ G$ deux sous-espaces vectoriels de E. Donner la formule de Grassmann pour F et G.
3. Soit E et F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. Montrer que $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 2 [5 pts]

Soit f la fonction définie par $f(x) = \exp(-x)\ln(1+x)$ pour $x > -1$.

1. Montrer que le développement limité à l'ordre 3 en 0 de f est donné par
$$f(x) = x - \frac{3x^2}{2} + \frac{4x^3}{3} + o(x^3) \text{ en } 0.$$
2. (a) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.
   (b) Donner la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0.
3. Déterminer, en citant un résultat précis du cours, les valeurs de $f(0),\ f'(0),\ f''(0)$ et $f'''(0)$ (sans calculer les dérivées successives de f).

Exercice 3 [6 pts]

1. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ? Justifier la réponse.
   (a) $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a + d = 1 \right\}$,
   (b) $E_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x - y = 0 \text{ et } y = z \right\}$,
   (c) $E_3 = \{ P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) \times P'(0) = 0 \}$.
2. Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Justifier la réponse.
   (a) $$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array}$$
   (b) $$f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x, y, z, 1) \end{array}$$
   (c) $$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P(0) + P'(0)X \end{array}$$

Exercice 4 [7 pts]

On considère F et G les sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par
$$F = \{ (2a + b, a + b + c, a - c) |\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R} \} \text{ et } G = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y = 0 \text{ et } x = z \}.$$

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par $f(x, y, z) = (2x + y, x + y + z, x - z)$ pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Vérifier que $\mathrm{Im}(f) = F$ et que $\ker(f) = G$.
3. Déterminer une base et la dimension de F.
4. En déduire la dimension de G en utilisant un résultat du cours.
5. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Correction

Proposée par J. Le Clainche

Correction exercice 1

1. Au voisinage de 0, on a $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$.
2. D'après la formule de Grassmann, on a $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.
3. — On a $f(0_E) = 0_F$ par linéarité de f donc $0_E \in \ker(f)$ et $\ker(f)$ est non vide.
   — Soient $u, v \in \ker(f)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a
   $$f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v) = \lambda \times 0 + 0 = 0$$
   donc $\lambda u + v \in \ker(f)$ et donc $\ker(f)$ est stable par combinaisons linéaires.

   Finalement, on a montré que $\ker(f)$ est non vide et stable par combinaisons linéaires donc $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Correction exercice 2

1. Au voisinage de 0, on a $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ donc par produit des développements limités on a
   $$f(x) = x - \frac{3x^2}{2} + \frac{4x^3}{3} + o(x^3) \text{ en } 0.$$
2. (a) Au voisinage de 0, on a $f(x) = x + o(x)$ donc la tangente en 0 à la courbe représentative de f a pour équation $y = x$.
   (b) Au voisinage de 0, on a $f(x) = x - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$, le premier terme non nul suivant l'ordre 1 est d'ordre 2 (donc d'ordre pair) et de coefficient strictement négatif. Ainsi, la tangente à la courbe représentative de f en 0 est au dessus de la courbe au voisinage de 0.
3. La fonction f est 3 fois dérivable au voisinage de 0 donc d'après la formule de Taylor Young à l'ordre 3 en 0, on a
   $$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + o(x^3).$$
   Finalement, par unicité du développement limité de f à l'ordre 3 en 0 et en identifiant les coefficients, on trouve
   $$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = -3,\ f'''(0) = 8.$$

Correction exercice 3

1. (a) On a $0 + 0 = 0 \neq 1$ donc $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin E_1$ et donc E_1 n'est pas un sous-espace vectoriel.
   (b) • On a $2 \times 0 - 0 = 0$ et $0 = 0$ donc $(0,0,0) \in E_2 \neq \emptyset$
   • Soient $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $u_2 = (x_2, y_2, z_2)$ deux éléments de E_2 et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $v = \lambda u_1 + u_2 = (x, y, z)$.
   D'une part, $2x - y = 2(\lambda x_1 + x_2) - (\lambda y_1 + y_2) = 2\lambda x_1 - \lambda y_1 + 2x_2 - y_2 = 0$ car $u_1, u_2 \in E_2$
   D'autre part, $y = \lambda y_1 + y_2 = \lambda z_1 + z_2 = z$ car $u_1, u_2 \in E_2$
   Donc $v \in E_2$ et E_2 est stable par combinaisons linéaires.

   E_2 est donc non vide et stable par combinaisons linéaires donc E_2 est un sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}^3$ donc un espace vectoriel.
   (c) Soit $P = 1$ et $Q = X$, on a $P \in E_3$ et $Q \in E_3$ mais $P + Q = 1 + X$ et donc $(P+Q)'(0) \times (P+Q)(0) = 1 \times 1 = 1 \neq 0$ donc $P + Q \notin E_3$ et E_3 n'est pas stable pour l'addition donc pas un espace vectoriel.

2. (a) Soient $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f_1((x,y)+\lambda(x',y')) &= f_1(x+\lambda x', y+\lambda y') \\ &= x+y+\lambda(x'+y') \\ &= x+y+\lambda(x'+y') \\ &= f_1(x,y)+\lambda f_1(x',y') \end{aligned}$$

L'application f_1 est donc linéaire.

(b) On a $f_2(0,0,0)=(0,0,0,1) \neq (0,0,0,0)$ donc f_2 n'est pas linéaire.

(c) Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f_3(P+\lambda Q) &= (P+\lambda Q)(0) + (P+\lambda Q)'(0)X \\ &= P(0)+\lambda Q(0)+P'(0)X+\lambda Q'(0)X \\ &= P(0)+P'(0)X+\lambda(Q(0)+Q'(0)X) \\ &= f_3(P)+\lambda f_3(Q) \end{aligned}$$

L'application f_3 est donc linéaire.

Correction exercice 4

1. Soient $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $v=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.
   $f(u+\lambda v) = f\left((x+\lambda a, y+\lambda b, z+\lambda c)\right)$
   $= (2(x+\lambda a)+(y+\lambda b), (x+\lambda a)+(y+\lambda b)+(z+\lambda c), (x+\lambda a)-(z+\lambda c))$
   $= (2x+y, x+y+z, x-z)+\lambda(2a+b, a+b+c, a-c)$
   $= f(u)+\lambda f(v)$.
   L'application f est donc linéaire.
2. • On a $F=\{(2a+b, a+b+c, a-c) |\ a,\ b,\ c\in\mathbb{R}\} = \{f(a,b,c) |\ (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\} = \mathrm{Im}(f)$.
   • Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned} (x,y,z)\in\ker(f) &\iff \begin{cases} 2x+y=0 \\ x+y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x+y=0 \\ 2x+y=0 \\ x=z \end{cases} \\ &\iff (x,y,z)\in G \end{aligned}$$

   On a donc $\ker(f)=G$.
3. On a $F=\mathrm{Im}(f)$ donc F est engendré par l'image d'une base de $\mathbb{R}^3$. On a donc

$$F=\mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2, f(e_3)) = \mathrm{Vect}((2,1,1),(1,1,0),(0,1,-1)) = \mathrm{Vect}((1,1,0),(0,1,-1))$$

   car $(2,1,1)=2(1,1,0)-(0,1,-1)$. On pose $u_2=(1,1,0)$ et $u_3=(0,1,-1)$. On a montré que F est engendré par $\{u_2,u_3\}$, de plus ces deux vecteurs sont non colinéaires donc la famille $\{u_2,u_3\}$ est libre et finalement (u_2,u_3) est une base de F et donc $\dim(F)=2$.
4. D'après le théorème du rang, on a $\dim(\mathbb{R}^3)=\dim(\ker(f))+\dim(\mathrm{Im}(f))=\dim(F)+\dim(G)$.
   Ainsi $\dim(G)=3-2=1$.
5. On remarque que $v=(1,-2,1)\in G$ donc $G=\mathrm{Vect}(v)$. La famille $\{u_2,u_3,v\}$ est libre, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$ obtenue en concaténant une base de F et une base de G donc F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.