Examen Intermédiaire du 19 mars 2024

Durée : 1h30

L'usage de tout document, calculatrice et de tout matériel connecté est interdit.
Il sera tenu compte de la rédaction. En particulier, les réponses ***doivent être justifiées****.*
Les exercices sont indépendants. Le sujet comporte deux pages.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 0. Écrire le numéro de votre groupe sur la copie.

Exercice 1. *(∼15%)* **(Questions de cours)**

(1) Soient f, g et h trois fonctions. Démontrer que la propriété de négligeabilité en 0 est transitive, c'est-à-dire que

$$\text{si} \quad \Big(f \underset{0}{=} \mathrm{o}(g) \text{ et } g \underset{0}{=} \mathrm{o}(h)\Big) \qquad \text{alors} \qquad f \underset{0}{=} \mathrm{o}(h).$$

(2) Trouver un élément α de $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ et trois fonctions f, g et h tels que

$$f \underset{\alpha}{\sim} g \qquad \text{et} \qquad f + h \text{ n'est pas équivalente à } g + h \text{ en } \alpha.$$

Exercice 2. *(∼15%)* **(Questions de cours)**
Donner un exemple d'un espace vectoriel E et de sous-espaces vectoriels F et G de E différents de $\{0_E\}$ dans chacun des cas de figure suivants :

(1) $F \oplus G = E$.

(2) $F + G = E$ mais F et G ne sont pas en somme directe.

(3) F et G sont en somme directe et $F \oplus G \neq E$.

Justifier les réponses.

Tourner la page

Exercice 3. *(∼40%)*
On considère la fonction $f\colon \left]-1,1\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}\,.$$

(1) Donner le développement limité à l'ordre 5 de la fonction f au voisinage de 0.

(2) Énoncer la formule de Taylor-Young à l'ordre 5 pour f et en déduire, pour chaque k entier avec $1 \leq k \leq 5$, la valeur de $f^{(k)}(0)$, la dérivée $k^{\text{ième}}$ de f évaluée en 0.

(3) On rappelle que f est la dérivée de la fonction arcsin et que $\arcsin(0) = 0$.
À l'aide de la question précédente, donner, pour chaque k entier avec $1 \leq k \leq 6$, la valeur de $\arcsin^{(k)}(0)$, la dérivée $k^{\text{ième}}$ de arcsin évaluée en 0.

(4) Déduire de la question précédente que le développement limité de arcsin en 0 à l'ordre 6 est donné par :

$$\arcsin(x) \underset{0}{=} x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \mathrm{o}(x^6)\,.$$

(5) Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\exp(x)\arcsin(x)$.

(6) Déterminer, si elle existe, la limite lorsque x tend vers 0 de

$$\frac{\ln(1+x^2)(\sin(x))^2}{\exp(x)\arcsin(x) - x - x^2}\,.$$

Exercice 4. *(∼45%)*
On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$. On considère

$$H = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y - z = 0 \text{ et } x - y - t = 0\right\}$$
$$\text{et } W = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3) \text{ où } v_1 = (1,0,1,1),\ v_2 = (3,1,1,2) \text{ et } v_3 = (-1,-2,3,1).$$

(1) **(a)** Démontrer que H est un sous-espace vectoriel de E.
(b) Déterminer une base de H.

(2) **(a)** La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est-elle libre ?
(b) Déterminer une base de W.
(c) En déduire la dimension de W.

(3) Démontrer que $W \subset H$.

(4) Donner un système d'équations cartésiennes pour W, c'est-à-dire donner des conditions nécessaires et suffisantes sur les nombres réels x, y, z, t pour que le vecteur $u = (x,y,z,t)$ soit dans W.

Correction de l'examen

N'hésitez pas à signaler les inévitables coquilles et à transmettre vos commentaires à Julian Le Clainche ou à Vincent Souveton.

Correction de l'Exercice 0.

A faire **au début** de l'épreuve, pas au moment de rendre sa copie.

Correction de l'Exercice 1.

(1) D'après la définition du cours, l'objectif est donc de montrer qu'au voisinage de 0, sauf éventuellement en 0, il existe une fonction ε qui tend vers 0 en 0 telle que f peut s'écrire :

$$f(x) = \varepsilon(x)h(x).$$

Pour cela, partons des hypothèses de l'énoncé.

- Puisque $f \underset{0}{=} o(g)$, alors il existe une fonction ε_1 telle que $\varepsilon_1(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $f(x) = \varepsilon_1(x)g(x)$ au voisinage de 0, sauf éventuellement en 0.
- De même, puisque $g \underset{0}{=} o(h)$, alors il existe une fonction ε_2 telle que $\varepsilon_2(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $g(x) = \varepsilon_2(x)h(x)$ au voisinage de 0, sauf éventuellement en 0.

Ainsi, au voisinage de 0, sauf éventuellement en 0, on a l'égalité suivante :

$$f(x) = \varepsilon_1(x)g(x) = \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)h(x),$$

avec $\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. On a donc bien l'expression voulue au début en posant $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)$. *Quelques points d'attention : ε_1 et ε_2 sont des fonctions et a priori, elles sont différentes ! Notez bien que l'expression obtenue est une vraie égalité, pas une approximation, valable dans un voisinage de 0. Enfin, il était aussi possible de raisonner en terme de quotient mais il aurait fallu pour cela savoir que g et h ne s'annulent pas au voisinage de 0, sauf éventuellement en 0, pour pouvoir écrire $\frac{f}{h} = \frac{f}{g} \times \frac{g}{h} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \times 0 = 0$... et cela n'était pas précisé dans les hypothèses.*

(2) Pour $\alpha = 0$, prenons $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x - 1$ et $h(x) = 1$. Dans ce cas, on a bien $f \underset{0}{\sim} g$ car $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2-1}{x-1} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ mais $f + h \underset{0}{\not\sim} g + h$ car $\frac{f(x)+h(x)}{g(x)+h(x)} = \frac{x^2}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \neq 1$.

Pour $\alpha = +\infty$, prenons $f(x) = x$, $g(x) = x - 1$ et $h(x) = -x$. Dans ce cas, on a bien $f \underset{+\infty}{\sim} g$ car $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{x-1} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 1$ mais $f + h \underset{+\infty}{\not\sim} g + h$ car $\frac{f(x)+h(x)}{g(x)+h(x)} = \frac{0}{-1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \neq 1$.

Correction de l'Exercice 2.

Pour tout l'exercice, on fixe $E = \mathbf{R}^3$ et on note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

(1) On considère $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_3)$.
La concaténation d'une base de F et d'une base de G forme une base de $\mathbf{R}^3$. Ainsi, on a $E = F \oplus G$.

(2) On considère $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$.
D'une part, on a
$F + G = \mathrm{Vect}(e_1, e_2) + \mathrm{Vect}(e_2, e_3) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_2, e_3) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3) = E$.
D'autre part, on a $e_2 \in F$ et $e_2 \in G$ donc $e_2 \in F \cap G$ (et $e_2 \neq 0_{\mathbf{R}^3}$) donc $F \cap G \neq \{0_{\mathbf{R}^3}\}$.

(3) On considère $F = \mathrm{Vect}(e_1)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_3)$.
D'une part, on a $F \cap G = \{0_{\mathbf{R}^3}\}$ car $\lambda e_1 = \mu e_3 \implies \lambda = \mu = 0$ (la famille $\{e_1, e_3\}$ est libre) donc F et G sont en somme directe.
D'autre part, on a $F \oplus G = \mathrm{Vect}(e_1, e_3)$ et $e_2 \notin F \oplus G$ donc $F \oplus G \neq E$.

Correction de l'Exercice 3.

(1) D'après les DL usuels au voisinage de 0,

$$(1+u)^{-1/2} \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 - \frac{5}{16}u^3 + o(u^3)$$

Donc en substituant $u = -x^2$ et en négligeant les termes d'ordre strictement supérieurs à 5 qui apparaissent dans le développement, on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2}(-x^2) + \frac{3}{8}\left(-x^2\right)^2 + o(x^5) \\ &\underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^5) \end{aligned}$$

(2) La fonction f est 5 fois dérivable au voisinage de 0. On peut donc lui appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre 5 dans ce même voisinage :

$$f(x) \underset{0}{=} f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \frac{x^3}{6}f^{(3)}(0) + \frac{x^4}{24}f^{(4)}(0) + \frac{x^5}{120}f^{(5)}(0) + o(x^5).$$

Par unicité du DL, on peut identifier ces coefficients avec ceux obtenus dans la question précédente et en déduire que :

$$f'(0) = 0,\ f''(0) = 1,\ f^{(3)}(0) = 0,\ f^{(4)}(0) = 9,\ f^{(5)}(0) = 0.$$

(3) On utilise le fait que $\arcsin' = f$ pour écrire :

$$\begin{aligned} \arcsin'(0) &= f(0) = 1 & \arcsin''(0) &= f'(0) = 0 \\ \arcsin^{(3)}(0) &= f''(0) = 1 & \arcsin^{(4)}(0) &= f^{(3)}(0) = 0 \\ \arcsin^{(5)}(0) &= f^{(4)}(0) = 9 & \arcsin^{(6)}(0) &= f^{(5)}(0) = 0 \end{aligned}$$

(4) Puisque $a = \arcsin$ est une fonction 6 fois dérivable au voisinage de 0, alors on peut lui appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre 6 au voisinage de 0. En utilisant la question précédente :

$$\begin{aligned}
a(x) &\underset{0}{=} a(0) + xa'(0) + \frac{x^2}{2}a''(0) + \frac{x^3}{6}a^{(3)}(0) + \frac{x^4}{24}a^{(4)}(0) + \frac{x^5}{120}a^{(5)}(0) + \frac{x^6}{720}a^{(6)}(0) + o(x^6) \\
&\underset{0}{=} 0 + x + 0x^2 + \frac{1}{6}x^3 + 0x^4 + \frac{9}{120}x^5 + 0x^6 + o(x^6) \\
&\underset{0}{=} x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6).
\end{aligned}$$

(5) D'après ce qui précède,

$$\arcsin(x) \underset{0}{=} x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4).$$

De plus, on sait d'après les DL usuels que

$$\exp(x) \underset{0}{=} 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4).$$

Par produit de deux DL à l'ordre 4 au voisinage de 0, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
\exp(x)\arcsin(x) &\underset{0}{=} \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4\right) \times \left(x + \frac{1}{6}x^3\right) + o(x^4) \\
&\underset{0}{=} x + \frac{1}{6}x^3 + x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + o(x^4) \\
&\underset{0}{=} x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

(6) On rappelle qu'une fonction équivaut en 0 au premier terme non nul de son DL(0).

Équivalent du numérateur : En utilisant les DL usuels, on sait qu'au voisinage de 0, $\ln(1+u) \underset{0}{=} u + o(u)$. Ainsi, en substituant $u = x^2$, on trouve que $\ln(1+x^2) \underset{0}{=} x^2 + o(x^2)$ et donc que $\ln(1+x^2) \underset{0}{\sim} x^2$. De plus, $\sin(x) \underset{0}{=} x + o(x)$ et donc $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$. Par produit d'équivalents, on trouve alors que :

$$\ln\left(1+x^2\right)(\sin(x))^2 \underset{0}{\sim} x^2 \times x \times x = x^4.$$

Équivalent du dénominateur : Ici, on utilise la question précédente pour obtenir $\exp(x)\arcsin(x) - x - x^2 = \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$ *(inutile d'aller jusqu'à l'ordre 4, on cherche juste un équivalent simple donc il suffit que la partie régulière du DL soit non nulle)*. Ainsi,

$$\exp(x)\arcsin(x) - x - x^2 \underset{0}{\sim} \frac{2}{3}x^3.$$

Équivalent de l'expression et limite : Par quotient d'équivalents,

$$\frac{\ln\left(1+x^2\right)(\sin(x))^2}{\exp(x)\arcsin(x) - x - x^2} \underset{0}{\sim} \frac{x^4}{\frac{2}{3}x^3} = \frac{3}{2}x.$$

Or, comme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3}{2}x = 0$ et que la limite de l'expression est la même que celle de son équivalent, on conclut que la limite cherchée existe et vaut 0.

Correction de l'Exercice 4.

(1) **(a)** Pour montrer que H est un sous-espace vectoriel de E, on montre que H est non-vide et stable par combinaisons linéaires.

- $*$ On a $0-2\times 0-0=0$ et $0-0-0=0$ donc $(0,0,0,0)\in H$ et H est non-vide.
- $*$ Soient $u=(x,y,z,t),\ v=(x',y',z',t')\in H$ et $\lambda\in\mathbf{R}$. On pose $w=u+\lambda v:=(a,b,c,d)$.

  On a
  $$\begin{aligned} a-2b-c &= (x+\lambda x')-2(y+\lambda y')-(z+\lambda z') \\ &= x-2y-z+\lambda(x'-2y'-z') \\ &= 0+\lambda\times 0 \text{ car } u,v\in H \end{aligned}$$
  $$a-2b-c=0.$$
  Et
  $$\begin{aligned} a-b-d &= (x+\lambda x')-(y+\lambda y')-(t+\lambda t') \\ &= x-y-t+\lambda(x'-y'-t') \\ &= 0+\lambda\times 0 \text{ car } u,v\in H \end{aligned}$$
  $$a-b-d=0$$
  Ainsi $u+\lambda v\in H$ et donc H est stable par combinaisons linéaires.

Finalement, on a montré que H est non vide et stable par combinaisons linéaires donc H est un sous-espace vectoriel de E.

(b) Soit $u=(x,y,z,t)\in\mathbf{R}^4$.

$$u\in H \iff \begin{cases} x-2y-z=0 \\ x-y-t=0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} z=x-2y \\ t=x-y \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x=1\times x+0\times y \\ y=0\times x+1\times y \\ z=1\times x-2\times y \\ t=1\times x-1\times y \end{cases} \iff u=x\times(1,0,1,1)+y\times(0,1,-2,-1).$$

On pose $u_1=(1,0,1,1)$ et $u_2=(0,1,-2,-1)$. On a montré que $\{u_1,u_2\}$ engendre H. De plus, ces deux vecteurs sont non colinéaires donc $\{u_1,u_2\}$ est libre. Finalement (u_1,u_2) est une base de H et $\dim(H)=2$.

(2) **(a)** On remarque que $v_3=5v_1-2v_2$ donc la famille $\{v_1,v_2,v_3\}$ n'est pas libre.

(b) D'après la question précédente, on a $W=\mathrm{Vect}(v_1,v_2,v_3)=\mathrm{Vect}(v_1,v_2)$ donc la famille $\{v_1,v_2\}$ engendre W. De plus, c'est une famille libre donc (v_1,v_2) est une base de W.

(c) D'après la question précédente, le sous-espace W possède une base à 2 éléments donc $\dim(W)=2$.

(3) On a $W=\mathrm{Vect}(v_1,v_2)$ donc pour montrer que $W\subset H$, il suffit de vérifier que $v_1\in H$ et $v_2\in H$.

- On a $1-2\times 0-1=0$ et $1-0-1=0$ donc $v_1\in H$
- On a $3-2\times 1-1=0$ et $3-1-2=0$ donc $v_2\in H$

(4) Méthode 1 :
D'après les questions précédentes, on a $W \subset H$ et $\dim(W) = 2 = \dim(H)$ donc $W = H$. Ainsi, par définition de H, pour $(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$, on a

$$(x, y, z, t) \in W \iff x - 2y - z = 0 \text{ et } x - y - t = 0.$$

Méthode 2 :
Soit $(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$, on a $(x, y, z, t) \in W = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ si et seulement si il existe $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $(x, y, z, t) = av_1 + bv_2$. Autrement dit

$$\begin{aligned}
(x, y, z, t) \in W &\iff \exists a,\ b \in \mathbf{R},\ \begin{cases} a + 3b = x \\ b = y \\ a + b = z \\ a + 2b = t \end{cases} \\
&\iff \exists a,\ b \in \mathbf{R},\ \begin{cases} a + 3b = x \\ b = y \\ -2b = z - x \\ -b = t - x \end{cases} \\
&\iff \exists a,\ b \in \mathbf{R},\ \begin{cases} b = y \\ a = x - 3y \\ z - x = -2b \\ x - t = b \end{cases} \\
&\iff \exists a,\ b \in \mathbf{R},\ \begin{cases} b = y \\ a = x - 3y \\ z - x = -2y \\ x - t = y \end{cases} \\
&\iff \exists a,\ b \in \mathbf{R},\ \begin{cases} b = y \\ a = x - 3y \\ x - 2y - z = 0 \\ x - y - t = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Or le système $\begin{cases} b = y \\ a = x - 3y \\ x - 2y - z = 0 \\ x - y - t = 0 \end{cases}$ admet une (unique) solution (a, b) si et seulement si $x - 2y - z = 0$ et $x - y - t = 0$ donc $(x, y, z, t) \in W \iff x - 2y - z = 0$ et $x - y - t = 0$ et on a donc montré que

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x - 2y - z = 0 \text{ et } x - y - t\}.$$