Examen terminal du 16 mai 2024

Durée : 2h

L'usage de tout document, calculatrice et de tout matériel connecté est interdit.
Il sera tenu compte de la rédaction. En particulier, les réponses ***doivent être justifiées****.*
Les exercices sont indépendants. Le sujet comporte deux pages.
Le barème est donné à titre indicatif.

Ecrire le numéro de votre groupe sur la copie.

Exercice 1. ***Questions de cours.*** *(environ 20%)* (*Les questions sont indépendantes.*)

(1) Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et *justifier la réponse.*

(a) Il existe une fonction f définie au voisinage de 0 qui admet les développements limités suivants en 0 :

$$\text{à l'ordre 2 } : f(x) \underset{0}{=} 1 + 2x + 4x^2 + o(x^2) \,;$$
$$\text{à l'ordre 3 } : f(x) \underset{0}{=} 1 + 2x + 3x^2 - x^3 + o(x^3) \,.$$

(b) Soit E un espace vectoriel et soit F un sous-espace vectoriel de E différent de E. Alors le complémentaire $G = \{u \in E \mid u \notin F\}$ de F est un sous-espace vectoriel de E.

(2) Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et *justifier la réponse par une démonstration ou un contre-exemple.*

(a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ ou $\alpha \in \{-\infty, +\infty\}$. Soient f, g et h trois fonctions définies au voisinage de α. Si $f \underset{\alpha}{\sim} g$, alors $fh \underset{\alpha}{\sim} gh$.

(b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

(3) Soient E et F deux espaces vectoriels et soit $\varphi \colon E \to F$ une application linéaire. Démontrer que l'application φ est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_E\}$.

Exercice 2. ***Application du cours.*** *(environ 10%)*

Soit $f \colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin(5x)}{x^2}$.

(1) Déterminer un équivalent simple de $\sin(5x)$ en 0 et en déduire un équivalent de $f(x)$ en 0.

(2) Soit u la suite de terme général $u_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$. Déterminer la nature (convergente, divergente) de la suite u et, si elle a une limite, la donner.

Exercice 3. *(environ 10%)*

Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 4 de

$$f(x) = \frac{1}{1 + \ln(1 + x^2)} \,.$$

Tourner la page

Exercice 4. *(environ 30%)* On note $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère la matrice

$$A_m = \begin{pmatrix} m+2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & m \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

de $M_3(\mathbb{R})$ et les vecteurs $v_1 = (m+2, 1, 1)$, $v_2 = (5, 2, 2)$ et $v_3 = (1, m, 0)$ de $\mathbb{R}^3$.

(1) Calculer $\det(A_m)$.

(2) Pour quelles valeurs de m la matrice A_m est-elle inversible ?

(3) Pour quelles valeurs de m la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

(4) On suppose dans toute la suite que $m = 0$. On note $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$.

- **(a)** Justifier que $\dim(F) \leq 2$ sans calcul, à l'aide de la question **(3)**.
- **(b)** Déterminer une base de F.
- **(c)** Trouver un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.

On considère le sous-espace vectoriel $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - z = 0\}$.

- **(d)** Déterminer la dimension de G.
- **(e)** Démontrer que $F = G$.

Exercice 5. *(environ 20%)*
On considère l'application linéaire

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & (x + 2y - z + t, x + 3y + 2t, y + z + t)\,. \end{array}$$

(1) Justifier, sans calcul, que φ n'est pas bijective.

(2) Soit $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et soit $\mathcal{D} = (e'_1, e'_2, e'_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(\varphi)$ de φ dans les bases $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^3$.

(3) Déterminer une base $\mathcal{B}_K$ de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et donner $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi))$.

(4) Donner la dimension de $\mathrm{Im}(\varphi)$ puis déterminer une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.

(5) L'application linéaire φ est-elle injective ? surjective ? Justifier les réponses.

On considère les vecteurs $w_1 = (1, 0, 0, 0)$ et $w_2 = (-2, 1, 0, 0)$ de $\mathbb{R}^4$. On note $\mathcal{B}$ la concaténation de la base $\mathcal{B}_K$ de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ obtenue dans la question **(3)** et de la famille $\{w_1, w_2\}$. On **admet** qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{R}^4$.

(6) Donner la matrice de φ dans les bases $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{D}$ (canonique) de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6. *(environ 10%)*
On considère les suites $u = (u_n)_{n\geq 0}$, $v = (v_n)_{n\geq 0}$ et $w = (w_n)_{n\geq 0}$ définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 2v_n}{5}, \qquad v_{n+1} = \frac{2u_n + 3v_n}{5} \qquad \text{et} \qquad w_n = v_n - u_n.$$

(1)
- **(a)** Démontrer que w est une suite géométrique et préciser sa raison.
- **(b)** Donner l'expression de w_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(2)
- **(a)** Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de w_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire que la suite u est monotone ; préciser si elle est croissante ou décroissante.
- **(b)** Même question pour la suite v.
- **(c)** Déduire des questions précédentes que u et v convergent, vers une même limite. *(On ne demande pas de déterminer cette limite.)*

Correction de l'examen

N'hésitez pas à signaler les inévitables coquilles et à transmettre vos commentaires à Julian Le Clainche ou à Vincent Souveton.

Correction de l'Exercice 1.

(1) **(a)** **Faux.** En effet, la première égalité nous dit que la partie régulière du $\mathrm{DL}_2(f)$ est $1 + 2x + 4x^2$, alors que la deuxième indique qu'il s'agit de $1 + 2x + 3x^2$. Cela est absurde, par unicité du développement limité.

(b) **Faux.** Puisque F est un sous-espace vectoriel de E, alors $0_E \in F$. Mais dans ce cas, par définition de G, $0_E \notin G$ et donc G ne peut pas être un sous-espace vectoriel de E.

(2) **(a)** **Vrai.** Par définition, puisque $f \underset{\alpha}{\sim} g$, alors il existe une fonction ρ définie dans un voisinage de α, avec $\rho(x) \underset{x\to\alpha}{\to} 1$, telle qu'on puisse écrire, dans un voisinage de α sauf éventuellement en α :

$$f(x) = \rho(x)g(x)$$

Ainsi, en multipliant de chaque côté de l'égalité par la fonction h, on a au voisnage de α sauf éventuellement en α :

$$\begin{aligned} & f(x)h(x) = \rho(x)g(x)h(x) \\ \iff & (fh)(x) = \rho(x)(gh)(x) \end{aligned}$$

avec ρ une fonction définie dans un voisinage de α telle que $\rho(x) \underset{x\to\alpha}{\to} 1$. Cela montre que $fh \underset{\alpha}{\sim} gh$.

(b) **Faux.** La suite de terme général $(-1)^n$, pour $n \geq 0$, est bien bornée mais elle n'est pas convergente.

(3) On procède par double implication.

- Supposons que φ soit injective. Alors, pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned} \varphi(x) = 0_F & \iff \varphi(x) = \varphi(0_E) \quad (\text{linéarité de } \varphi) \\ & \iff x = 0_E \quad (\text{injectivité de } \varphi). \end{aligned}$$

D'où on déduit que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_E\}$.

- Supposons que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_E\}$. Soient $x, y \in E$. Alors,

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \varphi(y) & \iff \varphi(x) - \varphi(y) = 0_F \\ & \iff \varphi(x-y) = 0_F \quad (\text{linéarité de } \varphi) \\ & \iff x - y = 0_E \quad (\text{puisque } \mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_E\}) \\ & \iff x = y. \end{aligned}$$

Et cela montre bien que la fonction φ est injective.

On a donc prouvé que l'application linéaire $\varphi : E \to F$ est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_E\}$.

Correction de l'Exercice 2.

(1) On sait que $\sin(y) \sim y$ au voisinage de 0 (calcul de limite ou premier terme non nul du DL en 0). Ainsi, on a $\sin(5x) \sim 5x$ en 0 et finalement, par quotient d'équivalents on trouve

$$f(x) = \frac{\sin(5x)}{x^2} \sim \frac{5}{x}$$

au voisinage de 0.

(2) D'après la question précédente, on a

$$u_n = f(\frac{1}{n}) \sim 5n$$

quand n tend vers $+\infty$. En particulier les suites u et $(5n)_{n\in\mathbf{N}}$ ont la même nature donc u tend vers $+\infty$.

Correction de l'Exercice 3.

Au voisinage de 0, on a $\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$ donc par substitution, on a

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) \text{ en } 0.$$

On a donc $f(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ avec $g(x) = 1 + \ln(1+x^2) = 1 + p(x) + o(x^4)$ en 0 où $p(x) = x^2 - \frac{x^4}{2}$. Le développement limité de f en 0 est donc donné par

$$f(x) = 1 - p(x) + p(x)^2 - p(x)^3 + p(x)^4 + o(x^4).$$

On a $p(x)^2 = x^4 + o(x^4)$ et $p(x)^3 = p(x)^4 = o(x^4)$ en 0.
Finalement, on a donc

$$f(x) = 1 - x^2 + \frac{3x^4}{2} + o(x^4)$$

en 0.

Correction de l'Exercice 4.

(1) On a $\det A_m = \begin{vmatrix} m+2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & m \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

En développant par rapport à la troisième colonne, on trouve

$$\begin{aligned} \det A_m &= 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - m \times \begin{vmatrix} m+2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \\ &= 0 - m\big(2(m+2) - 5\big) \\ \det A_m &= m(1-2m) \end{aligned}$$

(2) On sait que A_m est inversible si et seulement si $\det(A_m) \neq 0$. Ainsi, on a A_m inversible si et seulement si $m \notin \{0, \frac{1}{2}\}$.

(3) Les colonnes de A_m sont les vecteurs v_1, v_2 et v_3. Ainsi la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre si et seulement si $\det(A_m) \neq 0$.

Finalement (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbf{R}^3$ si et seulement si $m \notin \{0, \frac{1}{2}\}$.

(4) **(a)** On a $m = 0$ donc d'après la question précédente, la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ n'est pas libre et donc

$$\dim(F) = \dim(\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)) \leq 2.$$

(b) Les vecteurs v_1 et v_3 sont non colinéaires donc $\{v_1, v_3\}$ est une famille libre à 2 vecteurs de F, ainsi $\dim(F) \geq 2$. De plus, on a vu que $\dim(F) \leq 2$, on a donc $\dim(F) = 2$ et (v_1, v_3) est une base de F.

(c) On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$, montrons que la famille $\{v_1, v_3, e_3\}$ est libre. Soient $a, b, c \in \mathbf{R}$ tels que $av_1 + bv_2 + ce_3 = 0_{\mathbf{R}^3}$,

$$av_1 + bv_2 + ce_3 = 0_{\mathbf{R}^3} \iff \begin{cases} 2a + b = 0 \\ a = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} \iff a = b = c = 0.$$

Ainsi, la famille $\{v_1, v_3, e_3\}$ est libre donc en particulier si on pose $D = \mathrm{Vect}(e_3)$, on a $F \cap D = \{0\}$ donc D est un supplémentaire de F dans $\mathbf{R}^3$ (car on a de plus $\dim(F) + \dim(D) = 2 + 1 = 3$).

(d) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, on a
$u \in G \iff y - z = 0 \iff z = y \iff u = x(1,0,0) + y(0,1,1) = xe_1 + y(e_2 + e_3)$.
Il est donc clair que G est engendré par $\{e_1, e_2 + e_3\}$. De plus, ces deux vecteurs sont non colinéaires donc la famille $\{e_1, e_2 + e_3\}$ est libre et $(e_1, e_2 + e_3)$ est une base de F. Ainsi, on a montré que $\dim(G) = 2$.

(e) On remarque que $v_1 \in G$ et $v_3 \in G$. Or $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_3)$ donc on a $F \subset G$. De plus, on a $\dim(F) = 2 = \dim(G)$, on a donc $F = G$.

Correction de l'Exercice 5.

(1) L'espace de départ est de dimension 4 alors que celui d'arrivée est de dimension 3. Ainsi, l'application φ ne peut pas être bijective.

(2) Il s'agit d'exprimer l'image par φ des vecteurs de la base de départ en fonction de ceux de la base d'arrivée.

$$\begin{aligned} \varphi(e_1) &= (1,1,0) = 1 \cdot e'_1 + 1 \cdot e'_2 + 0 \cdot e'_3 \\ \varphi(e_2) &= (2,3,1) = 2 \cdot e'_1 + 3 \cdot e'_2 + 1 \cdot e'_3 \\ \varphi(e_3) &= (-1,0,1) = -1 \cdot e'_1 + 0 \cdot e'_2 + 1 \cdot e'_3 \\ \varphi(e_4) &= (1,2,1) = 1 \cdot e'_1 + 2 \cdot e'_2 + 1 \cdot e'_3 \end{aligned}$$

On en déduit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(3) Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$.

$$\begin{aligned} u \in \mathrm{Ker}(\varphi) \iff \varphi(x,y,z,t) = (0,0,0) &\iff \begin{cases} x + 2y - z + t = 0 \\ x + 3y + 0z + 2t = 0 \\ 0x + y + z + t = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + 2y - z + t = 0 \\ 0x + y + z + t = 0 \\ 0x + y + z + t = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -2y + z - t \\ y = -z - t \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 3z + 1t \\ y = -1z - 1t \\ z = 1z + 0t \\ t = 0z + 1t \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, la famille $\mathcal{B}_K = \{(3,-1,1,0),(1,-1,0,1)\}$, est génératrice de $\mathrm{Ker}(\varphi)$. De plus, les deux vecteurs qui la composent ne sont pas colinéaires. On en déduit que $\mathcal{B}_K$ est une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et que $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 2$.

(4) L'application $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ est linéaire avec $\dim(\mathbb{R}^4) = 4 < +\infty$. On peut donc lui appliquer le théorème du rang :

$$\dim(\mathbb{R}^4) = \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) + \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) \iff \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 4 - 2 = 2.$$

Il suffit donc, pour obtenir une base de l'image, trouver deux vecteurs non colinéaires qui font partie de $\mathrm{Im}(\varphi)$. En examinant la matrice A de l'application linéaire, on remarque que $(1,1,0) = \varphi(e_1)$ et $(-1,0,1) = \varphi(e_3)$ sont dans l'image et ne sont clairement pas colinéaires. Donc $((1,1,0),(-1,0,1))$ est une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.

(5) Puisque $\mathrm{Ker}(\varphi) \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ (la dimension du noyau est $2 \neq 0$), alors l'application n'est pas injective. Et puisque $\mathrm{Im}(\varphi) \neq \mathbb{R}^3$ (la dimension de l'image est $2 \neq 3$), alors l'application n'est pas surjective.

(6) Comme précédemment, il faut exprimer l'image par φ des vecteurs de la base de départ en fonction de ceux de la base d'arrivée. Appelons $u_1 = (3,-1,1,0)$ et $u_2 = (1,-1,0,1)$ de sorte que $\mathcal{B}_K = (u_1,u_2)$. On a alors $\mathcal{B} = (u_1,u_2,w_1,w_2)$.

$$\begin{aligned}
\varphi(u_1) &= (0,0,0) = 0\cdot e_1 + 0\cdot e_2' + 0\cdot e_3' \quad (\text{car } u_1 \in \ker(\varphi))\\
\varphi(u_2) &= (0,0,0) = 0\cdot e_1 + 0\cdot e_2' + 0\cdot e_3' \quad (\text{car } u_2 \in \ker(\varphi))\\
\varphi(w_1) &= (1,1,0) = 1\cdot e_1 + 1\cdot e_2' + 0\cdot e_3'\\
\varphi(w_2) &= (0,1,1) = 0\cdot e_1 + 1\cdot e_2' + 1\cdot e_3'
\end{aligned}$$

On en déduit $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'Exercice 6.

(1) **(a)** Pour tout entier naturel n, on a

$$\begin{aligned}
w_{n+1} &= (v_{n+1} - u_{n+1})\\
&= \frac{2u_n + 3v_n}{5} - \frac{3u_n + 2v_n}{5}\\
&= \frac{v_n - u_n}{5}\\
&= \frac{1}{5} w_n.
\end{aligned}$$

La suite w est donc géométrique de raison $1/5$.

(b) Le premier terme de la suite est $w_0 = v_0 - u_0 = 2$. Ainsi, pour tout entier naturel n,

$$w_n = w_0 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{2}{5^n}.$$

On remarque en particulier que tous les termes de la suite sont positifs.

(2) **(a)** Pour tout entier naturel n, on a

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{3u_n + 2v_n}{5} - u_n\\
&= \frac{2(v_n - u_n)}{5}\\
&= \frac{2}{5} w_n \geq 0
\end{aligned}$$

Ainsi, la suite u est croissante.

(b) Pour tout entier naturel n, on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{2u_n + 3v_n}{5} - v_n \\ &= \frac{2(u_n - v_n)}{5} \\ &= \frac{-2}{5} w_n \leq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, la suite v est décroissante.

(c) La suite u est croissante, la suite v est décroissante et la limite de leur différence, c'est-à-dire la limite de la suite w, tend vers 0. On en déduit que les suites u et v sont adjacentes. Elles convergent donc vers une même limite.