Analyse asymptotique

Il est proposé de traiter, au minimum, tous les exercices marqués d'un ⧫.

Relations de comparaison de fonctions

Exercice 1. ⧫ Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier les réponses.

a) $x = o\left(x^2\right)$ en 0, b) $x^5 = o\left(x^3\right)$ en 0, c) $x^3 = o\left(x^3\right)$ en 0,

d) $\sin(x) = o\left(x\right)$ en 0, e) $\sin(x) = o\left(1\right)$ en 0, f) $x\sin(x) = o\left(x^2\right)$ en 0,

g) $x^4 + x^2 = o\left(x^6\right)$ en 0, h) $x^4 + x^2 = o\left(x\right)$ en 0, i) $x^4 + x^2 = o\left(x^2\right)$ en 0.

Exercice 2. ⧫ Cocher les bonnes cases. Justifier les réponses.

	$f(x)$	$g(x)$	$f = o(g)$ en 0	$g = o(f)$ en 0	$f = o(g)$ en $+\infty$	$g = o(f)$ en $+\infty$
(a)	x	$1+x$				
(b)	$x+x^3$	x^2-x+1				
(c)	$\ln(x)$	$\ln(2x)$				
(d)	$\exp(x)$	$\exp(2x)$				
(e)	x	$\sin(x)$				
(f)	x^2	$\sin(x)$				
(g)	$\ln(1+x^2)$	x				
(h)	$x\ln(1+x^2)$	x^3				
(i)	$x^2\ln(1+x^2)$	$x\sin(x)$				

Exercice 3. ⧫ Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier les réponses.

a) $x \sim \sin(x)$ en 0, b) $\ln(1+x) \sim x$ en 0, c) $x \sim 1+x$ en 0,

d) $\ln(x) \sim \ln(2x)$ en 0, e) $\tan(x) \sim \sin(x)$ en 0, f) $x \sim 1+x$ en $+\infty$,

g) $e^x \sim e^{1+x}$ en $+\infty$, h) $e^{x^2} \sim e^x$ en $+\infty$, i) $x^2 \sim \sin(x)$ en $+\infty$.

Développements limités

Exercice 4. ⧫ Soit f la fonction définie par $f(x) = 3 + 7x - x^3 + 2x^4$.

Déterminer, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, le développement limité de f à l'ordre k en 0. On pourra distinguer les cas $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$ et $k \geqslant 4$.

Exercice 5. ⧫ Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 des fonctions f_1 et f_2 définies au voisinage de 0 par:

$$f_1(x) = (3 + 7x - x^3)^2 \quad \text{et} \quad f_2(x) = \exp(x)\ln(1+x),$$

en utilisant

(a) la formule de Taylor–Young,

(b) les développements limités de référence.

Exercice 6. ⧫ Donner le développement limité en 0 des fonctions f_i définies ci-dessous (au voisinage de 0) à l'ordre indiqué:

$f_1(x) = \cos(x)\exp(x)$ à l'ordre 3, $f_2(x) = (\ln(1+x))^2$ à l'ordre 4,

$f_3(x) = \exp(1+x^2)$ à l'ordre 4, $f_4(x) = \dfrac{1}{1-x-x^2}$ à l'ordre 4,

$f_5(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ à l'ordre 4, $f_6(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ à l'ordre 3,

$f_7(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ à l'ordre 4, $f_8(x) = \tan(x)$ à l'ordre 4,

$f_9(x) = \tan^2(x)$ à l'ordre 4, $f_{10}(x) = \sqrt{1+2x}$ à l'ordre 3,

$f_{11}(x) = \sqrt{1+x+x^2}$ à l'ordre 2, $f_{12}(x) = \sqrt[3]{(1-\sin x)^2}$ à l'ordre 3.

Exercice 7. Donner un équivalent simple, en 0, de

a) ⧫ $e^x - x - 1$, b) ⧫ $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\ln(1+x)$,

c) $x(1+\cos(x)) - 2\tan(x)$, d) $1 + e^{2x} - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2}$.

Exercice 8. ⧫ Écrire le développement limité à l'ordre 2 en 0 des fonctions a et b définies par

$$a(x) = \exp(x^2) - \cos(2x) \quad \text{et} \quad b(x) = (\sin(3x))^2.$$

En déduire, si elle existe, la limite lorsque x tend vers 0 de $\dfrac{\exp(x^2) - \cos(2x)}{(\sin(3x))^2}$.

Exercice 9. ♦ (Extrait de l'examen intermédiaire de 2022-2023). Soit $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \sin(x)\ln(1+x).$$

(a) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de f en utilisant les développements limités usuels.

(b) En déduire les valeurs de $f'(0)$, $f''(0)$ et $f'''(0)$.

(c) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $g(x) = e^{x^2} - \cos(x)$.

(d) En déduire, si elle existe, la limite lorsque x tend vers 0 de

$$\frac{e^{x^2} - \cos(x)}{\sin(x)\ln(1+x)}.$$

Exercice 10. Pour chacune des fonctions f_i définies ci-dessous, déterminer, si elle existe, la limite de $f_i(x)$ lorsque x tend vers 0:

- ♦ $f_1(x) = \dfrac{\ln(1+x) - \sin x}{x^2}$, ♦ $f_2(x) = \dfrac{\ln(1+2x)}{\sin(3x)}$,
- ♦ $f_3(x) = \dfrac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$, ♦ $f_4(x) = \dfrac{(1-x)e^x - \cos x}{\sin x - x}$,
- ♦ $f_5(x) = \dfrac{e^x - 1 - x}{(\sin x)^2}$, $f_6(x) = \dfrac{\ln(1+2x) - 2x}{1 - \sqrt{1-x^2}}$,
- ♦ $f_7(x) = \dfrac{\sin x \ln(1+x^2)}{\cos x - 1}$, $f_8(x) = \dfrac{\ln(1+x^3) - 2\sin(x^3)}{1 - \cos(x)}$.

Exercice 11. On considère la fonction donnée par $f(x) = \dfrac{\cos(x)\sin(3x)}{3x}$ pour tout nombre réel $x \neq 0$.

(a) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de f.

(b) On prolonge la fonction f par continuité en 0, c'est-à-dire que l'on considère la fonction $\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout nombre réel x par $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Vérifier que $\tilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(c) Déduire de la première question une équation de la tangente à la courbe représentative de $\tilde{f}$ au point d'abscisse 0.

(d) Quelle est la position de la courbe représentative de $\tilde{f}$ par rapport à cette tangente au voisinage du point d'abscisse 0? La fonction $\tilde{f}$ admet-elle un extremum local en 0?

Exercice 12. ♦ Pour chacune des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_7 de l'exercice 6, déterminer:

(a) une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction au point d'abscisse 0,

(b) la position de la courbe représentative de la fonction par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 13. On considère la fonction f donnée par $f(x) = \dfrac{1 - x + \ln x}{1 - \sqrt{2x - x^2}}$ et la fonction g donnée par $g(u) = f(1+u)$.

(a) Donner un équivalent simple de g en 0.

(b) En déduire un équivalent simple de f en 1 et, si elle existe, la limite lorsque x tend vers 1 de $\dfrac{1 - x + \ln x}{1 - \sqrt{2x - x^2}}$.

Exercice 14. Soit $f :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $]-\delta, \delta[$ où $\delta > 0$. Déterminer, si elle existe, la limite lorsque x tend vers 0 de

$$\frac{f(x) + f(-x) - 2f(0)}{x^2}.$$

Exercice 15. Soit $f :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}$ une fonction trois fois dérivable sur $]-\delta, \delta[$ où $\delta > 0$.

(a) Donner le développement limité d'ordre 2, en 0, de chacune des fonctions suivantes

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} - f'(0);\ h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2x} - f'(0),\ x \in]-\delta, \delta[, x \neq 0$$

(b) On suppose que $f''(0) \neq 0, f'''(0) \neq 0$. Trouver un équivalent simple de $g(x)$ et de $h(x)$ lorsque x tend vers 0. En déduire que $h(x) = o(g(x))$ en 0.

Exercice 16. On suppose que la fonction f est définie au voisinage de $+\infty$. On dit que f **admet un développement limité au voisinage de l'infini** lorsque la fonction $x \mapsto g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ admet un développement limité à l'ordre n en 0.

Si $g(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$ en 0, on peut écrire

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

en $+\infty$ ou en $-\infty$, selon le domaine de définition de f.

(a) Utiliser un développement limité en $+\infty$ pour trouver, si elles existent, les limites lorsque x tend vers $+\infty$ des expressions suivantes:

$$\frac{x(\ln(x+2) - \ln(x)) - 2}{x - \sqrt{x^2 - 1}} \; ; \qquad x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

(b) Si $f(x) = ax + b + o(1)$ en $+\infty$, on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est **asymptote** à la courbe de f. Montrer que les courbes des fonctions suivantes ont une asymptote en $+\infty$:

$$x \mapsto x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \; ; \qquad x \mapsto (x^4 + x^2)^{1/4} + (x^3 + x^2)^{1/3}.$$

Exercice 17. Donner des exemples (en justifiant à chaque fois) de fonctions f, g, h, k et de points α tels que, au voisinage de α:

(a) $f \sim g$, $h \sim k$ mais $f + h \not\sim g + k$,

(b) $f \sim g$ mais $e^f \not\sim e^g$,

(c) $f = o(g)$ mais $\ln(f) \neq o[\ln(g)]$,

(d) $f = o(g)$, $h = o(k)$ mais $f + h \neq o(g + k)$.

Extraits d'examens d'années précédentes

Exercice 18 (Extrait de l'examen terminal de 2017-2018)**.** On donne le développement limité de $f(x) = \arccos(x)$ à l'ordre 6 en 0:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + o(x^6).$$

(1) À partir de ce développement limité et en admettant que f est 5 fois dérivable en 0, déterminer la valeur de $f^{(4)}(0)$ et de $f^{(5)}(0)$.

(2) Calculer le développement limité de la fonction $g(x) = \arccos(-2x)$ à l'ordre 3 en 0.

(3) En justifiant les calculs, déterminer le développement limité à l'ordre 3 de la fonction

$$h(x) = \cos(x) \arccos(-2x).$$

(4) Donner un équivalent simple de la fonction $h(x) - \frac{\pi}{2} - 2x$ en 0.

(5) En utilisant les développements limités, déterminer

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) \arccos(-2x) - \frac{\pi}{2} - 2x}{e^{2x} - \cos(x) - 2\sin(x)}.$$

Exercice 19 (Extrait de l'examen terminal de 2018-2019)**.** On définit pour x proche de 0 les fonctions f, g et h suivantes:

$$f(x) = e^x - x^2 - \sqrt{1 + 2x}, \quad g(x) = \ln(1 + \sin(x)) + 1 - e^x \quad \text{et} \quad h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

(1) En utilisant les DL usuels, donner le DL à l'ordre 3 en 0 de f.

(2) En utilisant la formule de Taylor–Young, donner le DL à l'ordre 2 en 0 de g.

(3) En déduire un équivalent simple de h en 0 puis calculer $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$.

(4) Justifier que la fonction h est continue en 0.

Exercice 20 (Extrait de l'examen intermédiaire de 2020-2021)**.** On considère la fonction f définie, pour tout réel $x > -1$, par $f(x) = \sin(x) \ln(1 + x)$.

(1) Montrer que $f(x) \sim x^2$ en 0.

(2) Soit h une fonction qui ne s'annule pas au voisinage de 0, sauf éventuellement en 0, telle que $\dfrac{x^2}{h(x)}$ a une limite quand x tend vers 0. À l'aide de la première question, que peut-on dire de $\dfrac{f(x)}{h(x)}$ quand x tend vers 0?

(3) Donner les valeurs de $n \in \mathbb{Z}$ pour lesquelles l'affirmation proposée est vraie, en justifiant les réponses:

  (a) $f = o(x^n)$ en 0,

  (b) $x^n = o(f)$ en 0.

Exercice 21 (Extrait de l'examen intermédiaire de 2021-2022)**.**

(1) Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f définie par:

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{(1+x)}.$$

(2) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de f.

(3) En déduire les valeurs de $f'(0)$, $f''(0)$ et $f'''(0)$.

(4) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de $g(x) = \cos(2x) - 1$.

(5) En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(-x) + \sin(x)}{\cos(2x) - 1}$.

Correction des exercices

N'hésitez pas à signaler les inévitables coquilles et à transmettre vos commentaires à Julian Le Clainche ou à Vincent Souveton.

Relations de comparaison de fonctions

Correction de l'Exercice 1.

(a) Faux. Pour $x \neq 0$, on a $\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \to \infty$ quand $x \to 0$.

(b) Vrai. Pour $x \neq 0$, on a $\frac{x^5}{x^3} = x^2 \to 0$ quand $x \to 0$.

(c) Faux. $x \neq 0$, on a $\frac{x^3}{x^3} = 1 \to 1$ quand $x \to 0$.

(d) Faux. *La technique suivante, dite de la dérivée, est un grand classique que l'on retrouvera tout au long de cette feuille d'exercices. Elle sert à trouver la limite de certaines formes indéterminées.* Posons $f(x) = \sin(x)$ pour $x \in \mathbf{R}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et donc en particulier elle est dérivable en 0 et par définition, on a

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}.$$

Or, on sait que pour $x \in \mathbf{R}$, on a $f'(x) = \cos(x)$ et finalement

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = f'(0) = \cos(0) = 1.$$

On a donc montré que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \neq 0$

(e) Vrai. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{1} = \frac{0}{1} = 0$.

(f) Faux. Au voisinage de 0, on a $\frac{x\sin(x)}{x^2} = \frac{\sin(x)}{x}$.

On a montré en (iv) que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \neq 0$ et donc $x\sin(x)$ n'est pas négligeable devant x^2 au voisinage de 0.

(g) Faux. On sait que pour des entiers m, n, on a $x^m = o(x^n)$ en 0 si $m > n$. Ici, on a $4 \leq 6$ et $2 \leq 6$ donc $x^4 + x^2$ n'est pas négligeable devant x^6.

On peut également vérifier que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^4+x^2}{x^6} = \lim\limits_{x\to 0} \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right] = +\infty \neq 0$.

(h) Vrai. On raisonne comme dans le cas précédent mais ici on a $4 > 1$ et $2 > 1$ donc $x^4 = o(x)$ et $x^2 = o(x)$ en 0 et finalement, en sommant on obtient $x^4 + x^2 = o(x)$.

(i) Faux. On raisonne comme dans les deux cas précédents et cette fois, comme en (vii), $x^4 + x^2$ n'est pas négligeable devant x^2 en 0 car on a $\frac{x^4+x^2}{x^2} = x^2 + 1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 \neq 0$

Correction de l'Exercice 2.

On pourra utiliser que si $f = o(g)$ au voisinage de α, alors $g \neq o(f)$ au voisinage de α (si f et g sont non nulles au voisinage de α).

(a) Pour $x \neq 0$, $\frac{x}{1+x} \to 0$ quand $x \to 0$ donc $f = o(g)$ en 0.

Et $\frac{1+x}{x} = \frac{1}{x} + 1 \to 1$ quand $x \to +\infty$ donc $g \neq o(f)$ et de même $f \neq o(g)$ en $+\infty$.

(b) Pour $x \neq 0$, $\frac{x+x^3}{x^2-x+1} = \frac{x(1+x^2)}{x^2-x+1} \to 0$ quand $x \to 0$. Donc $f = o(g)$ en 0.

$\dfrac{x^2-x+1}{x+x^3} = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} \to 0$ quand $x \to +\infty$. Donc $g = o(f)$ en $+\infty$.

(c) On utilise les opérations usuelles sur les logarithmes.

Pour $x \neq 0$, $\frac{\ln(2x)}{\ln(x)} = \frac{\ln(2)+\ln(x)}{\ln(x)} = 1 + \frac{\ln(2)}{\ln(x)} \to 1$ quand $x \to 0$ et quand $x \to \infty$. Donc aucune des propositions n'est correcte.

(d) On utilise les opérations usuelles sur les exponentielles.

$\frac{\exp(x)}{\exp(2x)} = \exp(-x) \to 1$ quand $x \to +0$. Donc $f \neq o(g)$ en 0 et $g \neq o(f)$ en 0.

De même, $\frac{\exp(x)}{\exp(2x)} = \exp(-x) \to 0$ quand $x \to +\infty$ donc $f = o(g)$ en $+\infty$.

(e) On a montré dans l'exercice précédent que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Ainsi, on a $f \neq o(g)$ et $g \neq o(f)$ en 0.

La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est bornée sur $\mathbf{R}$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$ et on a $g = o(f)$ en $+\infty$.

(f) Au voisinage de 0, on a $\frac{x^2}{\sin(x)} = x \times \frac{x}{\sin(x)}$ or $\frac{x}{\sin(x)} \to 1$ quand $x \to 0$ et donc $\frac{x^2}{\sin(x)} \to 0$ quand $x \to 0$ et on a $f = o(g)$ en 0.

De la même manière qu'au dessus, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} = 0$ et donc $f = o(g)$ en $+\infty$.

(g) La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x^2)$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et donc en particulier elle est dérivable en 0 et par définition, on a

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x}.$$

Or, on sait que pour $x \in \mathbf{R}$, on a $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ et finalement

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = f'(0) = 0.$$

On a donc $f = o(g)$ en 0.

En utilisant les propriétés de base du logarithme, on a pour $x \neq 0$,

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x} = \frac{\ln(x^2)+\ln(1+\frac{1}{x^2})}{x} = \frac{2\ln(x)+\ln(1+\frac{1}{x^2})}{x}.$$

Or, on sait que $\frac{\ln(x)}{x} \to 0$ quand $x \to +\infty$ et $\ln(1+\frac{1}{x^2}) \to 0$ quand $x \to +\infty$ et donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = 0$$

et donc $f = o(g)$ en $+\infty$.

(h) On a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\ln(1+x^2)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \lim\limits_{\substack{y\to 0\\ >}} \frac{\ln(1+y)}{y}$. On reconnaît ici encore une dérivée, en effet, si on pose $f(y) = \ln(1+y)$, on a $\frac{\ln(1+y)}{y} = \frac{f(y)-f(0)}{y-0}$. Or la fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et pour $y \geq 0$, on a $f'(y) = \frac{1}{1+y}$ donc

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ >}} \frac{\ln(1+y)}{y} = f'(0) = 1.$$

Ainsi, on a $f \neq o(g)$ et $g \neq o(f)$ en 0.

D'autre part, $\frac{x\ln(1+x^2)}{x^3} = \frac{1}{x} \times \frac{\ln(1+x^2)}{x} \to 0$ quand $x \to +\infty$ et $f = o(g)$ en $+\infty$.

(i) On a montré plus haut que $\frac{\sin(x)}{x} \to 1$ quand $x \to 0$ et on sait que $\ln(1+x^2) \to \ln(1) = 0$ quand $x \to 0$. Ainsi, on a $\frac{x^2 \ln(1+x^2)}{x \sin(x)} = \frac{x}{\sin(x)} \times \ln(1+x^2) \to 0$ quand $x \to 0$ et donc $f = o(g)$ en 0.

La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est bornée sur $\mathbf{R}$ et $x \ln(1+x^2) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$ donc, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin(x)}{x \ln(1+x^2)} = 0$ et $g = o(f)$.

$f(x)$	$g(x)$	$f = o(g)$ en 0	$g = o(f)$ en 0	$f = o(g)$ en $+\infty$	$g = o(f)$ en $+\infty$
x	$1+x$	X			
$x+x^3$	x^2-x+1	X			X
$\ln(x)$	$\ln(2x)$				
$\exp(x)$	$\exp(2x)$			X	
x	$\sin(x)$				X
x^2	$\sin(x)$	X			X
$\ln(1+x^2)$	x	X		X	
$x \ln(1+x^2)$	x^3			X	
$x^2 \ln(1+x^2)$	$x \sin(x)$	X			X

Correction de l'Exercice 3.

On pourra utiliser que $f \sim g$ au voisinage de α si, et seulement si, $g \sim f$ au voisinage de α.

(a) Vrai. Se référer à la question **(d)** de l'Exercice 1.

(b) Vrai. Posons $f(x) = \ln(1+x)$ pour $x \in \left]-1, +\infty\right[$. La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition et donc en particulier elle est dérivable en 0 et par définition, on a

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Or, on sait que pour $x \in \mathbf{R}$, on a $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ et finalement

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1.$$

(c) Faux. Pour $x \neq 0$, on a $\frac{x}{1+x} \to 0$ quand $x \to 0$.

(d) Vrai. Se référer à la question (iii) de l'Exercice 2.

(e) Vrai. On rappelle que, pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{\left(\frac{1}{2} + k\right)\pi ; k \in \mathbf{Z}\}$, $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Donc, au voisinage de 0, $\frac{\tan(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\cos(x)} \to 1$ quand $x \to 0$.

(f) Vrai. Pour $x \neq 0$, on a $\frac{1+x}{x} = \frac{1}{x} + 1 \to 1$ quand $x \to +\infty$ et donc $x \sim 1+x$ en $+\infty$.

(g) Faux. On a $\frac{e^{x+1}}{e^x} = e^1 \to e$ quand $x \to +\infty$.

(h) Faux. On a $\frac{e^{x^2}}{e^x} = e^{x^2-x}$, or $x^2 - x = x(x-1) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$ et donc $e^{x^2-x} \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.

(i) Faux. On sait que si $f \sim g$ en α et que f admet une limite en α notée ℓ (éventuellement $l = \pm\infty$) alors g admet une limite en α et $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = \ell$.

Ici, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ mais $x \mapsto \sin(x)$ n'admet pas de limite en $+\infty$ donc ces deux fonctions ne sont pas équivalentes en $+\infty$.

Développements limités

Correction de l'Exercice 4.

On rappelle que si m et n sont deux entiers tels que $m > n$ alors $x^m = o\left(x^n\right)$ en 0.

- $\underline{k=0}$ D'après le rappel ci-dessus, on a $x = o\left(1\right)$, $x^3 = o\left(1\right)$ et $x^4 = o\left(1\right)$. Ainsi, $7x - x^3 + 2x^4 = o\left(1\right)$ et donc le DL de f à l'ordre 0 en 0 est
$$f(x) = 3 + o\left(1\right).$$
- $\underline{k=1}$ De même, on a $x^3 = o\left(x\right)$ et $x^4 = o\left(x\right)$. Ainsi, $-x^3 + 2x^4 = o\left(x\right)$ et donc le DL de f à l'ordre 1 en 0 est
$$f(x) = 3 + 7x + o\left(x\right).$$
- $\underline{k=2,3,4}$ De la même manière, le DL de f à l'ordre 2 en 0 est
$$f(x) = 3 + 7x + o\left(x^2\right),$$
le DL de f à l'ordre 3 en 0 est
$$f(x) = 3 + 7x - x^3 + o\left(x^3\right),$$
le DL de f à l'ordre 4 en 0 est
$$f(x) = 3 + 7x - x^3 + 2x^4 + o\left(x^4\right),$$

∘ <u>$k \geq 5$</u> On a $f(x) - \left(3 + 7x - x^3 + 2x^4\right) = 0 = o\left(x^k\right)$ pour tout $k \geq 5$. Ainsi, le DL de f à l'ordre $k \geq 5$ en 0 est

$$f(x) = 3 + 7x - x^3 + 2x^4 + o\left(x^k\right).$$

Correction de l'Exercice 5.

(a) ∘ La fonction f_1, en tant que fonction polynômiale, est 2 fois dérivable au voisinage de 0. On peut commencer par développer :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (3+7x)^2 - 2(3+7x)x^3 + x^6 \\ &= 9 + 42x + 49x^2 - 6x^3 - 14x^4 + x^6 \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= 42 + 98x - 18x^2 - 56x^3 + 6x^5 \\ f_1''(x) &= 98 - 36x - 168x^2 + 30x^4 \end{aligned}$$

On peut alors appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en 0 à la fonction f_1 :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f_1(0) + x f_1'(0) + \frac{x^2}{2} f_1''(0) + o_{x\to 0}(x^2) \\ &= 9 + 42x + 49x^2 + o_{x\to 0}(x^2) \end{aligned}$$

∘ La fonction f_2, en tant que produit de fonctions 2 fois dérivables au voisinage de 0, l'est aussi. Ses deux premières dérivées sont :

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= \exp(x)\left(\ln(1+x) + \frac{1}{1+x}\right) \\ f_2''(x) &= \exp(x)\left(\ln(1+x) + \frac{2}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}\right) \end{aligned}$$

On peut alors appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en 0 à la fonction f_2 :

$$\begin{aligned} f_2(x) &= f_2(0) + x f_2'(0) + \frac{x^2}{2} f_2''(0) + o_{x\to 0}(x^2) \\ &= 0 + x + \frac{x^2}{2} + o_{x\to 0}(x^2) \end{aligned}$$

(b) ∘ On reconnaît le produit de deux fonctions $u(x) = v(x) = 3 + 7x - x^3$. Le $\mathrm{DL}_2(0)$ de la fonction u et celui de la fonction v s'écrivent $u(x) = v(x) = 3 + 7x + o_{x\to 0}(x^2)$. Pour trouver le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $u \times v$, il suffit de faire le produit des parties régulières des $\mathrm{DL}_2(0)$ de u et de v, en omettant les termes d'ordre strictement supérieur à 2, et d'ajouter le petit o. Donc, au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} f_2(x) &= u(x)v(x) \\ &= (3+7x)^2 + o(x^2) \\ &= 9 + 42x + 49x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

∘ C'est encore une fois un produit de deux fonctions $u(x) = \exp(x)$ et $v(x) = \ln(1+x)$. Ces $\mathrm{DL}_2(0)$ sont usuels :

$$\begin{aligned} u(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ v(x) &= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \end{aligned}$$

Donc, au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} f_2(x) &= u(x)v(x) \\ &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)\left(x - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^2) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + x^2 + o(x^2) \\ &= x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \end{aligned}$$

Comme on vient de le voir, en pratique, il est laborieux de trouver un DL avec la formule de Taylor-Young. On privilégiera donc l'utilisation des DL usuels, qui sont à connaître par cœur ; l'utilisation de T-Y, quant à elle, sera réservée à des exercices plus théoriques et/ou en cas d'oubli de son cours (chose qui n'arrive jamais).

Correction de l'Exercice 6.

1. On reconnaît un produit de deux fonctions. On forme les $\mathrm{DL}_3(0)$ des fonctions cosinus et exponentielle au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) = p(x) + o(x^3) \\ \exp(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = q(x) + o(x^3) \end{aligned}$$

Pour trouver la partie régulière du $\mathrm{DL}_3(0)$ de f_1, on commence par faire le produit de la partie régulière de cosinus avec celle d'exponentielle :

$$\begin{aligned} p(x)q(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{12} \\ &= 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{12} \end{aligned}$$

Enfin, le DL recherché a pour partie régulière le produit $p(x)q(x)$, en omettant les termes négligeables devant x^3, et en ajoutant le petit o. Au voisinage de 0 :

$$f_1(x) = 1 + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

2. Encore une fois, c'est un produit de fonctions. Formons le $\mathrm{DL}_4(0)$ de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, au voisinage de 0 :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

Pour trouver le DL recherché, on multiplie la partie régulière du $\mathrm{DL}_4(0)$ ci-dessus par lui-même, en omettant les termes négligeables devant x^4, et on ajoute le petit o. Ainsi, au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} f_2(x) &= x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{3} + o(x^4) \\ &= x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

3. On peut réécrire la fonction f_3 sous la forme $f_3(x) = e \times \exp(x^2)$ et se ramener à un DL usuel en 0. Formons le $\mathrm{DL}_4(0)$ de la fonction $x \mapsto \exp(x^2)$. C'est un DL composé. Au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} \exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) = p(x) + o(x^4) \\ x^2 = x^2 + o(x^4) = q(x) + o(x^4) \text{ avec } q(0) = 0 \end{aligned}$$

Pour trouver la partie régulière du $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\exp(x^2)$, on commence par calculer $p(q(x))$:

$$p(q(x)) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24}$$

Enfin, le DL recherché a pour partie régulière la composée $p(q(x))$, en omettant les termes négligeables devant x^4, et en ajoutant le petit o. On n'oublie pas de multiplier par e car $f_3(x) = e \times \exp(x^2)$. Au voisinage de 0 :

$$f_3(x) = e + ex^2 + \frac{ex^4}{2} + o(x^4)$$

4. C'est un quotient de la forme $f_4(x) = \frac{1}{g(x)}$ avec $g(x) = 1 - x - x^2 + o(x^4) = 1 + q(x) + o(x^4)$ et $q(0) = 0$. Le DL recherché est donc de la forme :

$$f_4(x) = 1 - q(x) + q(x)^2 - q(x)^3 + q(x)^4 - ... + o(x^4),$$

en omettant les termes négligeables devant x^4. Or :

- $q(x) = -x - x^2 + o(x^4)$;
- $q(x)^2 = x^2 + 2x^3 + x^4 + o(x^4)$;
- $q(x)^3 = -x^3 - 3x^4 + o(x^4)$;
- $q(x)^4 = x^4 + o(x^4)$;
- $q(x)^n = o(x^4)$, pour tout entier $n \geq 5$.

Ainsi, au voisinage de 0 :

$$f_4(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + o(x^4)$$

5. La fonction f_5 est un quotient $f_5(x) = \frac{1}{\cos(x)}$. Pour déterminer le DL de f_5, on doit commencer par écrire $\cos(x)$ sous la forme $\cos(x) = 1 + q(x) + o(x^4)$ au voisinage de 0 et un DL de f_5 sera alors donné par

$$f_5(x) = 1 - q(x) + q(x)^2 - q(x)^3 + q(x)^4 - ... + o\left(x^4\right).$$

Le DL de cos en 0 à l'ordre 4 est

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right).$$

On a donc

- $q(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)$;
- $q(x)^2 = \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right)$;
- $q(x)^n = o\left(x^4\right)$, pour tout entier $n \geq 3$.

Ainsi, au voisinage de 0 on a

$$f_5(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + 5\frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right).$$

6. On sait que le terme constant dans le DL en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est nul. Ainsi, on peut considérer un DL à l'ordre 4 de $x \mapsto \ln((1+x)$ et en le multipliant par $\frac{1}{x}$, on obtiendra un DL à l'ordre 3 de f_6.

   Le DL de $\ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 4 est

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right).$$

   Ainsi, au voisinage de 0, on a

$$f_6(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o\left(x^3\right).$$

7. On reconnaît ici le produit des fonctions $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ dont on connaît les DL en 0. On a

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right)$$
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o\left(x^4\right)$$

   La partie régulière du DL à l'ordre 4 en 0 de f_7 est alors donnée par le produit des parties régulières des deux DL ci-dessus (en omettant les termes négligeables devant x^4.)

   On obtient alors

$$f_7(x) = x - \frac{3x^2}{2} + \frac{11x^3}{6} - \frac{25x^4}{12} + o\left(x^4\right).$$

8. Pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \sin(x) \times f_5(x)$ et on reconnaît le produit de deux fonctions dont on connaît un DL en 0 à l'ordre 4. Au voisinage de 0, on a

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)$$
$$f_5(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + 5\frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)$$

   La partie régulière du DL à l'ordre 4 en 0 de f_8 est alors donnée par le produit des parties régulières des deux DL ci-dessus et on a

$$f_8(x) = x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^4\right).$$

9. Il suffit ici d'élever le DL de la fonction précédente au carré. On obtient

$$f_9(x) = (\tan(x))^2 = \left(x + \frac{x^3}{3}\right) + o\left(x^4\right) = x^2 + \frac{2x^4}{3} + o\left(x^4\right).$$

10. *Rappelons que $\sqrt[n]{y} = y^{1/n}$.* On est face à une fonction de la forme $(1+y)^\alpha$ (avec ici $\alpha = \frac{1}{2}$) dont on connaît le DL en 0 :

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + \frac{y^3}{16} + o\left(y^3\right)$$

   Finalement, par substitution, au voisinage de 0, on a

$$f_{10}(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right)$$

11. La fonction f_{11} est la composée des fonctions $x \mapsto x + x^2$ et $x \mapsto \sqrt{1+x}$. Or $x + x^2$ vaut 0 en $x = 0$ donc on peut utiliser la composition de fonctions. Au voisinage de 0, on a

$$x + x^2 = x + x^2 + o\left(x^2\right)$$
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o\left(x^2\right)$$

    Ainsi, au voisinage de 0,

$$\begin{aligned} f_{11}(x) &= 1 + \frac{(x+x^2)}{2} - \frac{(x+x^2)^2}{8} + o\left(x^2\right) \\ &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + o\left(x^2\right). \end{aligned}$$

12. Pour $x \in \mathbf{R}$, on écrit $f_{12}(x) = \sqrt{(1-\sin(x))^2} = (1-\sin(x))^{\frac{2}{3}}$. Pour écrire un DL de f_{12}, on commence par écrire $1 - \sin(x)$ sous la forme $1 + q(x) + o\left(x^3\right)$. En utilisant le DL à l'ordre 3 en 0 de sin, on a

$$1 - \sin(x) = 1 - x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right).$$

    Enfin, le DL de f_{12} à l'ordre 3 en 0 est donné par

$$f_{12}(x) = 1 + \alpha q(x) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} q(x)^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} q(x)^3 + o\left(x^3\right)$$

où $\alpha = \frac{2}{3}$ et donc $\alpha(\alpha-1) = -\frac{2}{9}$ et $\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) = \frac{8}{27}$.

On a

- $q(x) = -x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$;
- $q(x)^2 = x^2 + o\left(x^3\right)$;
- $q(x)^3 = -x^3 + o\left(x^3\right)$.

Ainsi, on obtient

$$f_{12}(x) = 1 - \frac{2}{3}x - \frac{x^2}{9} + \frac{5}{81}x^3 + o\left(x^3\right) \quad \text{au voisinage de } 0.$$

Correction de l'Exercice 7.

Pour résoudre cet exercice, on se souviendra qu'une fonction est équivalente en 0 au premier terme non nul de son DL(0). On va chercher à développer au plus petit ordre possible pour faire apparaître au moins un terme non nul. L'équivalent recherché sera alors le terme d'ordre le plus petit parmi ces termes non nuls calculés.

(a) Au voisinage de 0, on a :

$$\begin{aligned}\exp(x) - x - 1 &= 1 + x + \frac{x^2}{2} - x - 1 + o(x^2)\\ &= \frac{x^2}{2} + o(x^2)\end{aligned}$$

Donc $\exp(x) - x - 1 \sim \frac{x^2}{2}$ en 0.

(b) Au voisinage de 0, on a :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

D'où :

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\ln(1+x) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + o(1)\\ &= \frac{1}{2} + o(1)\end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\ln(1+x) \sim \frac{1}{2}$ en 0.

(c) On a vu le DL de la fonction tangente à l'Exercice 6. Ainsi, au voisinage de 0 :

$$2\tan(x) = 2\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 2x + \frac{2x^3}{3} + o(x^3)$$

De plus, au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}x(1+\cos(x)) &= x\left(2 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\\ &= 2x - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\end{aligned}$$

On en déduit, au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}x(1+\cos(x)) - 2\tan(x) &= -\frac{x^3}{2} - \frac{2x^3}{3} + o(x^3)\\ &= \frac{-7x^3}{6} + o(x^3)\end{aligned}$$

Donc $x(1+\cos(x)) - 2\tan(x) \sim \frac{-7x^3}{6}$ en 0.

(d) Au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}1 + \exp(2x) &= 2 + 2x + 2x^2 + o(x^2)\\ \sqrt{1+4x} &= 1 + 2x - 2x^2 + o(x^2)\\ \sqrt{1+6x^2} &= 1 + 3x^2 + o(x^2)\end{aligned}$$

Ainsi, au voisinage de 0 :

$$1 + \exp(2x) - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2} = x^2 + o(x^2)$$

Donc $1 + \exp(2x) - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2} \sim x^2$ en 0.

Correction de l'Exercice 8.

Au voisinage de 0, on a

$$e^x = 1 + x + o\left(x\right),$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$$

et donc, par substitution, le DL de a en 0 à l'ordre 2 est

$$a(x) = 1 + x^2 - (1 - 2x^2) + o\left(x^2\right) = 3x^2 + o\left(x^2\right).$$

De même, connaissant le DL de sin en 0, on a

$$b(x) = 9x^2 + o\left(x^2\right).$$

On a donc $a(x) \simeq 3x^2$ et $b(x) \simeq 9x^2$ en 0.
Finalement, par quotient d'équivalents, on a

$$\frac{a(x)}{b(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{3} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$$

La limite cherchée est donc $1/3$.

Correction de l'Exercice 9.

(a) Au voisinage de 0, on a

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) \quad \text{et} \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right).$$

Ainsi, par produit des $\mathrm{DL}_3(0)$, on obtient

$$f(x) = \sin(x)\ln(1+x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right).$$

(b) La fonction f est 3 fois dérivable en 0, on peut donc lui appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en 0 :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + o(x^3)$$

De plus, par unicité du développement limité, on peut identifier les coefficients et on trouve

$$f'(0) = 0, \quad f''(0) = 2 \quad \text{et} \quad f'''(0) = -3.$$

(c) Au voisinage de 0, on a

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) \quad \text{et} \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$$

$$\text{et par substitution} \quad e^{x^2} = 1 + x^2 + o\left(x^2\right).$$

Ainsi, en sommant les $\mathrm{DL}_2(0)$, on obtient

$$g(x) = e^{x^2} - \cos(x) = \frac{3x^2}{2} + o\left(x^2\right).$$

(d) On déduit des DL calculés aux questions 1 et 3 que $f(x) \sim x^2$ en 0 et $g(x) \sim \frac{3x^2}{2}$ en 0. Ainsi, par quotient d'équivalent, on obtient

$$\frac{e^{x^2} - \cos(x)}{\sin(x)\ln(1+x)} \sim \frac{3}{2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{3}{2}.$$

Correction de l'Exercice 10.

Il s'agit d'utiliser les DL afin de trouver un équivalent simple de la fonction pour lequel le calcul de la limite est immédiat.

(i) Au voisinage de 0 :

$$\ln(1+x) - \sin(x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Donc le numérateur équivaut à $-x^2/2$ en 0. Quant au dénominateur, il équivaut à x^2. Par quotient d'équivalents :

$$f_1(x) = \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$$

La limite cherchée est donc $-1/2$.

(ii) Au voisinage de 0 :

$$\ln(1+2x) = 2x + o(x)$$
$$\sin(3x) = 3x + o(x)$$

En 0, le numérateur équivaut à $2x$ et le dénominateur équivaut à $3x$. Par quotient d'équivalents :

$$f_2(x) = \frac{\ln(1+2x)}{\sin(3x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2}{3} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{2}{3}$$

La limite cherchée est donc $2/3$.

(iii) Au voisinage de 0 :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$
$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

Donc $\cos(x) - \sqrt{1-x^2} = \frac{x^4}{6} + o(x^4)$ et le numérateur équivaut à $\frac{x^4}{6}$ en 0. Le dénominateur, lui, équivaut à x^4 en 0. Ainsi, par quotient d'équivalents :

$$f_3(x) = \frac{\cos(x) - \sqrt{1-x^2}}{x^4} \underset{x\to0}{\sim} \frac{1}{6} \underset{x\to0}{\longrightarrow} \frac{1}{6}$$

La limite cherchée est donc 1/6.

(iv) Au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}(1-x)\exp(x) &= (1-x)\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - x - x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\\ &= 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\end{aligned}$$

Donc :

$$(1-x)\exp(x) - \cos(x) = \frac{-x^3}{3}$$

Le numérateur équivaut donc à $-x^3/3$ en 0. Pour le dénominateur, au voisinage de 0 :

$$\sin(x) - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Donc le dénominateur équivaut à $-x^3/6$ en 0. Par quotient d'équivalents :

$$f_4(x) = \frac{(1-x)\exp(x) - \cos(x)}{\sin(x) - x} \underset{x\to0}{\sim} 2 \underset{x\to0}{\longrightarrow} 2$$

La limite cherchée est donc 2.

(v) Au voisinage de 0, on a $e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$ donc $e^x - 1 - x \simeq \frac{x^2}{2}$ en 0. Pour le dénominateur, au voisinage de 0 : $(\sin(x))^2 = x^2 + o\left(x^2\right)$ et donc $(\sin(x))^2 \simeq x^2$ en 0. Ainsi, par quotient d'équivalents on obtient

$$f_5(x) = \frac{e^x - 1 - x}{(\sin(x))^2} \underset{x\to0}{\sim} \frac{1}{2} \underset{x\to0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

On a donc $\lim_{x\to0} f_5(x) = \frac{1}{2}$.

(vi) Au voisinage de 0, on a $\ln(1+2x) - 2x = -2x^2 + o\left(x^2\right)$ et donc $\ln(1+2x) - 2x \simeq -2x^2$ en 0.

De même, au voisinage de 0, on a $1 - \sqrt{1-x^2} = \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$ et donc $1 - \sqrt{1-x^2} \sim \frac{x^2}{2}$ en 0.

Ainsi, par quotient d'équivalents on obtient

$$f_6(x) = \frac{\ln(1+2x) - 2x}{1 - \sqrt{1-x^2}} \underset{x\to0}{\sim} -4 \underset{x\to0}{\longrightarrow} -4$$

et la limite recherchée est -4.

(vii) On sait (en utilisant les DL en 0) que $\sin(x) \sim x$ en 0, $\ln(1+x^2) \sim x^2$ en 0 et $\cos(x) - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$ en 0.

On a donc $f_7(x) \sim \frac{x^3}{-\frac{x^2}{2}} \sim -2x$ en 0 et donc $\lim_{x\to0} f_7(x) = 0$.

(viii) Le DL en 0 à l'ordre 3 du numérateur est $\ln(1+x^3) - \sin(x^3) = -x^3 + o\left(x^3\right)$. Ainsi, $\ln(1+x^3) - \sin(x^3) \sim -x^3$ en 0.

De plus, on sait que $1 - \cos(x) \simeq \frac{x^2}{2}$ en 0.

On a donc $f_8(x) \sim \frac{-x^3}{\frac{x^2}{2}} \sim -2x$ en 0 et donc $\lim_{x\to0} f_8(x) = 0$.

Correction de l'Exercice 11.

(a) On veut déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de f, pour ce faire, on commence par donner un développement limité à l'ordre 4 en 0 du numérateur puis, on multiplie celui-ci par $\frac{1}{3x}$.

Le numérateur est un produit de deux fonctions dont on connaît le développement limité et on trouve donc que le développement limité à l'ordre 4 en 0 de celui-ci est

$$\cos(x)\sin(3x) = 3x - 6x^3 + o\left(x^4\right).$$

Ainsi, en multipliant ce DL par $\frac{1}{3x}$, on obtient

$$f(x) = 1 - 2x^2 + o\left(x^3\right)$$

et c'est bien le DL à l'ordre 3 en 0 de f.

(b) D'après la question précédente, au voisinage de 0, on a $f(x) = 1 - 2x^2 + o\left(x^3\right)$. En particulier, on a donc $f(x) = 1 + o(1)$ et donc $\lim_{x\to0} \tilde{f}(x) = \lim_{x\to0} f(x) = 1 = \tilde{f}(0)$.

Ainsi, la fonction $\tilde{f}$ est continue en 0. De plus, il est clair que la fonction f est continue sur son domaine de définition on obtient donc que $\tilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(c) On a montré que $\tilde{f}(x) = 1 - 2x^2 + o\left(x^3\right)$ au voisinage de 0. En particulier, on a $\tilde{f}(x) = 1 + o\left(x\right)$ au voisinage de 0 donc la tangente à la courbe représentative de $\tilde{f}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 1$.

(d) Le DL à l'ordre 3 en 0 de $\tilde{f}$ est $\tilde{f}(x) = 1 - 2x^2 + o\left(x^3\right)$. Or 2 est pair et le coefficient devant x^2 est négatif, ainsi, la courbe représentative de $\tilde{f}$ est en dessous de sa tangente au voisinage 0. Ceci signifie qu'il existe $]-\delta, \delta[$ un voisinage de 0 tel que pour $x \in]-\delta, \delta[$, on a $\tilde{f}(x) \leq 1 = \tilde{f}(0)$. Autrement dit, la fonction $\tilde{f}$ admet un maximum local en 0.

Correction de l'Exercice 12.

(a) On a montré que $f_1(x) = 1 + x + o(x)$ au voisinage de 0, donc la tangente à la courbe représentative de f_1 au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x + 1$.

De plus, la fonction admet un $\mathrm{DL}_3(0)$ donné par $f_1(x) = 1 + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. Comme 3 est impair, alors la courbe représentative de f_1 traverse sa tangente en 0.

(b) On a montré que $f_2(x) = 0 + o(x)$ au voisinage de 0 donc la tangente à la courbe représentative de f_2 au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 0$.

De plus, la fonction admet un $\mathrm{DL}_2(0)$ donné par $f_2(x) = x^2 + o(x^2)$. Comme 2 est pair et que le coefficient devant x^2 est positif, alors la courbe représentative de f_2 est au-dessus de sa tangente en 0.

(c) On a montré que $f_3(x) = e + o(x)$ au voisinage de 0 donc la tangente à la courbe représentative de f_3 au point d'abscisse 0 a pour équation $y = e$.

De plus, la fonction admet un $\mathrm{DL}_2(0)$ donné par $f_3(x) = e + ex^2 + o(x^2)$. Comme 2 est pair et que le coefficient devant x^2 est positif, alors la courbe représentative de f_3 est au-dessus de sa tangente en 0.

(d) On a montré que $f_7(x) = x + o(x)$ au voisinage de 0 donc la tangente à la courbe représentative de f_7 au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x$.

De plus, la fonction admet un $\mathrm{DL}_2(0)$ donné par $f_7(x) = x - \frac{3x^2}{2} + o(x^2)$. Comme 2 est pair et que le coefficient devant x^2 est négatif, alors la courbe représentative de f_3 est en-dessous de sa tangente en 0.

Correction de l'Exercice 13.

(a) Pour u au voisinage de 0, on a $g(u) = f(1+u) = \frac{1-(1+u)+\ln(1+u)}{1-\sqrt{2(1+u)-(1+u)^2}} = \frac{\ln(1+u)-u}{1-\sqrt{1-u^2}}$.

En utilisant les DL, on trouve que $\ln(1+u) - u \sim -\frac{u^2}{2}$ et $1 - \sqrt{1-u^2} \sim \frac{u^2}{2}$ en 0.

Ainsi, par quotient d'équivalents, on obtient $g(u) \sim -1$ en 0.

(b) On en déduit que $f(x) = g(x-1) \sim -1$ en $x = 1$ (c'est-à-dire $u = 0$). Finalement,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (-1) = -1.$$

Correction de l'Exercice 14.

La fonction f étant deux fois dérivable au voisinage de 0, on peut appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en 0 :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$$
$$f(-x) = f(0) - f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{f(x) + f(-x) - 2f(0)}{x^2} &= \frac{f''(0)x^2 + o(x^2)}{x^2} \\ &= f''(0) + o(1) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} f''(0)\end{aligned}$$

De manière générale, on utilise cette expression en analyse numérique pour discrétiser la dérivée seconde en un point x_0. En effet, pour un incrément Δx proche de 0 :

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) + f(x_0 - \Delta x) - 2f(x_0)}{\Delta x^2}$$

Correction de l'Exercice 15.

(a) La fonction f est trois fois dérivable au voisinage de 0, on peut donc lui appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en 0 et on obtient

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + o\left(x^3\right)$$

et, par substitution

$$f(-x) = f(0) - xf'(0) + \frac{f''(0)}{2}x^2 - \frac{f'''(0)}{6}x^3 + o\left(x^3\right).$$

Enfin, les DL à l'ordre 2 en 0 de g et h sont donnés par

$$g(x) = \frac{f''(0)}{2}x + \frac{f'''(0)}{6}x^2 + o\left(x^2\right),$$

$$h(x) = \frac{f'''(0)}{6}x^2 + o\left(x^2\right).$$

(b) Supposons que $f''(0) \neq 0$ et $f'''(0) \neq 0$. D'après la question précédente, on a alors $g(x) \sim \frac{f''(0)}{2}x$ et $h(x) \sim \frac{f'''(0)}{6}x^2$ en 0.

En particulier, on a $h(x) = o\left(g(x)\right)$ en 0.

Correction de l'Exercice 16.

1. (a) Posons $f(x) = \dfrac{x(\ln(x+2) - \ln(x)) - 2}{x - \sqrt{x^2-1}}$. On a :

$$\begin{aligned} g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{\frac{1}{x}\left(\ln\left(2+\frac{1}{x}\right) - \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) - 2}{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}} \\ &= \frac{\frac{1}{x}\left(\ln\left(1+2x\right) - 2x\right)}{\frac{1}{x}\left(1 - \sqrt{1-x^2}\right)} \\ &= \frac{\ln\left(1+2x\right) - 2x}{1 - \sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Or, au voisinage de 0 :

$$\ln(1+2x) - 2x = -2x^2 + o(x^2)$$
$$1 - \sqrt{1-x^2} = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Ainsi, au voisinage de 0, $\ln(1+2x) - 2x \sim -2x^2$ et $1 - \sqrt{1-x^2} \sim \frac{x^2}{2}$. Par quotient d'équivalents, on a donc :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1+2x\right) - 2x}{1 - \sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x^2}{\frac{x^2}{2}} = -4$$

(b) Posons $f(x) = x - x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$. Il s'agit de trouver un DL en 0 de $g(x) = f(1/x)$:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\ln(1+x) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \\ &= \frac{1}{2} + o(1) \end{aligned}$$

Ainsi, au voisinage de 0, $g(x) \sim 1/2$. On a donc :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\ln(1+x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

2. (a) Posons $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$. On sait que $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \ln(1+x)$ admet un $\mathrm{DL}_2(0)$ donné par :

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Ainsi, $f(x)$ admet un DL au voisinage de l'infini :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Par conséquent, au voisinage de l'infini :

$$x^2 f(x) = x - \frac{1}{2} + o(1)$$

Donc la courbe représentative de la fonction admet une asymptote en $+\infty$ d'équation $y = x - \dfrac{1}{2}$.

(b) On peut réécrire, pour $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^4 + x^2)^{1/4} + (x^3 + x^2)^{1/3} \\ &= \left[x^4\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right]^{1/4} + \left[x^3\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]^{1/3} \\ &= x\left[\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{1/4} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1/3}\right] \end{aligned}$$

Posons, pour $x \neq 0$, $f_1(x) = \left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{1/4}$ et $f_2(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{1/3}$. Au voisinage de 0 :

$$g_1(x) = f_1\left(\frac{1}{x}\right) = (1+4x^2)^{1/4} = 1 + o(x)$$
$$g_2(x) = f_2\left(\frac{1}{x}\right) = (1+x)^{1/3} = 1 + \frac{x}{3} + o(x)$$

Donc, au voisinage de 0 :

$$g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}(g_1(x)+g_2(x)) = \frac{2}{x} + \frac{1}{3} + o(1)$$

Ainsi, au voisinage de $+\infty$:

$$f(x) = 2x + \frac{1}{3} + o(1)$$

Donc la courbe représentative de la fonction admet une asymptote en $+\infty$ d'équation $y = 2x + \dfrac{1}{3}$.

Correction de l'Exercice 17.

(a) On considère les fonctions f, g, h et k définies par $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x - 1$ et $h(x) = k(x) = 1$.

On a clairement $f \sim g$ et $h \sim k$ en 0 mais $f + h \not\sim g + k$ en 0.

En effet, $(f+h)(x) = x^2$, $(g+k)(x) = x$ et $x^2 \not\sim x$ en 0.

(b) On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = x^2$.

On a $f \sim g$ en $+\infty$ mais $e^f \not\sim e^g$ en $+\infty$.

En effet, on a $\frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = \frac{e^{x^2+x}}{e^{x^2}} = e^x \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.

(c) On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2$, $g(x) = x$.

On a $f = o(g)$ en 0 mais $\ln(f) \neq o\left(\ln(g)\right)$ en 0.

En effet, on a $\frac{\ln(f(x))}{\ln(g(x))} = \frac{2\ln(x)}{\ln(x)} = 2 \not\to 0$ quand $x \to 0$.

(d) On considère les fonctions f, g, h et k définies par $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = x$, $h(x) = \cos(x)$ et $k(x) = -x$.

On a clairement $f = o\left(g\right)$ et $h = o\left(k\right)$ en $+\infty$ mais $g + k = 0$ et $f + h$ n'est pas la fonction nulle donc $f + h \neq o\left(g + k\right)$ en $+\infty$

Extraits d'examens d'années précédentes

Correction de l'Exercice 18.

(1) Puisque f est 5 fois dérivable au voisinage de 0, on peut lui appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre 5 en 0 :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{120}x^5 + o(x^5)$$

Par unicité du DL, on identifie les coefficients et on conclut :

$$f(0) = \frac{\pi}{2},\ f'(0) = -1,\ f''(0) = 0,\ f^{(3)}(0) = -1,\ f^{(4)}(0) = 0,\ f^{(5)}(0) = -9$$

(2) Par substitution, en reprenant le DL d'arccos donné dans l'énoncé :

$$g(x) = \frac{\pi}{2} + 2x + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$$

(3) Le $\mathrm{DL}_3(0)$ de cosinus est donné par :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

En reprenant la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} h(x) = \cos(x)\arccos(-2x) &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)\left(\frac{\pi}{2} + 2x + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\right) \\ &= \frac{\pi}{2} + 2x + \frac{4}{3}x^3 - \frac{\pi}{4}x^2 - x^3 + o(x^3) \\ &= \frac{\pi}{2} + 2x - \frac{\pi x^2}{4} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$

(4) Ainsi, $h(x) - \dfrac{\pi}{2} - 2x = \dfrac{-\pi x^4}{4} + o(x^2)$. D'où $h(x) - \dfrac{\pi}{2} - 2x \sim \dfrac{-\pi x^2}{4}$ au voisinage de 0.

(5) On a : $e^{2x} - \cos(x) - 2\sin(x) = \dfrac{5x^2}{2} + o(x^2)$. Donc $e^{2x} - \cos(x) - 2\sin(x) \sim \dfrac{3x^2}{2}$ au voisinage de 0. D'après la question précédente, par quotient d'équivalents :

$$\begin{aligned} \frac{\cos(x)\arccos(-2x) - \frac{\pi}{2} - 2x}{e^{2x} - \cos(x) - 2\sin(x)} &= \frac{h(x) - \frac{\pi}{2} - 2x}{e^{2x} - \cos(x) - 2\sin(x)} \\ &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{-\pi x^2}{4}}{\frac{5x^2}{2}} = \frac{-\pi}{10} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{-\pi}{10} \end{aligned}$$

La limite cherchée est donc $-\pi/10$.

Correction de l'Exercice 19.

(1) On commence par donner un DL à l'ordre 3 en 0 de $y \mapsto \sqrt{1+y}$, on a

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + \frac{y^3}{16} + o\left(y^3\right).$$

Par substitution, on obtient que au voisinage de 0,

$$\sqrt{1+2x} = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right).$$

De plus, le DL en 0 à l'ordre 3 de exp est connu et on obtient finalement que le DL à l'ordre 3 en 0 de f est

$$f(x) = -\frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right).$$

(2) La fonction g est deux fois dérivable au voisinage de 0, on peut donc lui appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en 0 et on obtient

$$g(x) = g(0) + xg'(0) + \frac{g''(0)}{2}x^2 + o\left(x^2\right).$$

Or pour x au voisinage de 0, on a $g'(x) = \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)} - e^x$ et $g''(x) = -\frac{1}{1+\sin(x)} - e^x$. En particulier, on a $g'(0) = 0$ et $g''(0) = -2$ donc le DL de g en 0 à l'ordre 2 est

$$g(x) = -x^2 + o\left(x^2\right).$$

(3) D'après les questions précédentes, on a $f(x) \sim -\frac{x^3}{3}$ et $g(x) \sim -x^2$ en 0. Ainsi, on obtient que $h(x) \sim \frac{x}{3}$ en 0.
En particulier, on a $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = \lim\limits_{x\mapsto 0} \frac{x}{3} = 0$.

(4) On vient de montrer que $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$ or $h(0) = 0$, autrement dit, on a $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = h(0)$ et donc h est continue en 0.

Correction de l'Exercice 20.

(1) Pour $x \neq 0$, on a :

$$\frac{f(x)}{x^2} = \frac{\sin(x)}{x} \times \frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 \times 1 = 1$$

Donc $f(x) \sim x^2$ en 0.

(2) Appelons L la limite en 0 de $x^2/h(x)$ (éventuellement, $L = \pm\infty$). En utilisant la qu: 1 :

$$\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{f(x)}{x^2} \times \frac{x^2}{h(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 \times L = L$$

Donc $f(x)/h(x)$ a même limite que $x^2/h(x)$ en 0.

(3) (a) On applique la question précédente avec $h(x) = x^n$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^n} = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 2 \\ 0 \text{ si } n = 1, 0, -1, -2, ... \\ \pm\infty \text{ si } n = 3, 4, 5, 6, ... \end{cases}$$

Donc, au voisinage de 0, $f = o(x^n)$ pour tout entier $n \leq 1$.

(b) De même :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^n}{f(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{f(x)}{x^n}} = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 2 \\ \pm\infty \text{ si } n = 1, 0, -1, -2, ... \\ 0 \text{ si } n = 3, 4, 5, 6, ... \end{cases}$$

Donc, au voisinage de 0, $x^n = o(f)$ pour tout entier $n \geq 3$.

Correction de l'Exercice 21.

(1) La fonction f est définie pour $x+1 > 0$ et $x+1 \neq 0$, i.e. pour $x+1 > 0$. Donc $\mathcal{D}_f =]-1, +\infty[$.

(2) f est le produit de $\ln(1+x)$ par $\dfrac{1}{1+x}$. Commençons par former le $DL_3(0)$ de $\ln(1+x)$, qui est usuel :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \text{ quand } x \to 0.$$

Puis, formons le $DL_3(0)$ de $1/(1+x)$, lui aussi usuel :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3), \text{ quand } x \to 0.$$

Pour obtenir la partie régulière du $DL_3(0)$ de f, il suffit de multiplier la partie régulière du $DL_3(0)$ de $\ln(1+x)$ avec celle du $DL_3(0)$ de $1/(1+x)$, en omettant les termes d'ordre strictement plus grand que 3. En conclusion,

$$f(x) = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 + o(x^3), \text{ quand } x \to 0.$$

(3) La fonction f est 3 fois dérivable au voisinage de 0. On peut donc lui appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en 0 :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + x^2\frac{f''(0)}{2} + x^3\frac{f'''(0)}{6} + o(x^3), \text{ quand } x \to 0.$$

Par unicité du DL, on peut identifier les coefficients de ce DL avec ceux obtenus à la question précédente. Cela donne : $f'(0) = 1$, $f''(0) = -3$ et $f'''(0) = 11$.

(4) C'est immédiat pour peu que l'on se souvienne du $DL_3(0)$ de la fonction cosinus, qui est usuel : $\cos(2x)-1 = 1-\frac{(2x)^2}{2}-1+o(x^3) = -2x^2+o(x^3)$, quand $x \to 0$.

(5) En se rappelant que $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ au voisinage de 0, on obtient $f(-x) + \sin(x) = -\frac{3x^2}{2} - 2x^3 + o(x^3)$ au voisinage de 0. Une fonction est équivalente en 0 au premier terme non nul de son $DL(0)$ (s'il existe). Ici, le numérateur est donc équivalent à $-\frac{3x^2}{2}$. De même, le dénominateur équivaut à $-2x^2$. Par quotient d'équivalent, on en déduit que $\frac{f(-x)+\sin(x)}{\cos(2x)-1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{3}{4}$, qui tend vers 3/4 quand x tend vers 0. Donc la limite cherchée est 3/4.