Espaces vectoriels

Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Exercice 1. ⧫ Dire si les ensembles suivants (munis des lois + et · usuelles, rappelées en cours) sont des espaces vectoriels. Justifier les réponses.

(1) $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0 \text{ et } 2x-y+3z=0\}$,

(2) $E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = |y|\}$,

(3) $E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-2y+z=0\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+z=0\}$,

(4) $E_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, x_1+x_2=x_4 \right\}$,

(5) $E_5 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, ad-bc=1 \right\}$,

(6) $E_6 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P'(1)=0\}$ *(EI 2022-23)*,

(7) $E_7 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0)=1\}$.

Exercice 2. Dire si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Justifier les réponses.

(1) $E_1 = \{f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)\geq 0\}$,

(2) $E_2 = \{f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid f \text{ est impaire}\}$,

(3) $E_3 = \{f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid f \text{ est croissante}\}$,

(4) $E_4 = \{f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid \forall x\in\mathbb{R}, \forall y\in\mathbb{R},\ f(x+y)=f(x)+f(y)\}$,

(5) $E_5 = \left\{f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} \,\middle|\, f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ et pour tout } a\geq 0, \int_{-a}^{a} f(t)dt = 0\right\}$.

Exercice 3. Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

(a) Montrer que $F\cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F\subset G$ ou $G\subset F$.

(b) Montrer que $F+G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $F\cup G$, au sens suivant : si K est un sous-espace vectoriel de E contenant F et G, alors $F+G\subset K$.

(c) Montrer que l'on a $(F\cap G)+(F\cap H)\subset F\cap(G+H)$ et donner un exemple où l'inclusion est stricte.

Exercice 4. ⧫ Pour chaque espace vectoriel E ci-dessous, les sous-espaces vectoriels F et G de E sont-ils supplémentaires dans E ? Justifier.

(a) $E=\mathbb{R}^2$, $F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y=0\}$ et $G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=y\}$,

(b) $E=\mathbb{R}^3$, $F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-y+z=0\right\}$ et $G=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x+y-z=0\right\}$,

(c) $E=\mathbb{R}[X]$, $F=\{P\in\mathbb{R}[X] \mid P''(X)=0\}$ et $G=\{P\in\mathbb{R}[X] \mid P(0)=0 \text{ et } P'(0)=0\}$.

(d) $E=\mathbb{R}^4$, $F=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \mid x_1+x_2+x_3+x_4=0\right\}$ et $G=\left\{(x,x,x,x)\in\mathbb{R}^4 \mid x\in\mathbb{R}\right\}$.

(e) $E=\mathbb{R}^3$, $F=\left\{(a,2a,3a)\in\mathbb{R}^3 \mid a\in\mathbb{R}\right\}$ et $G=\left\{(b,b+c,2c)\in\mathbb{R}^3 \mid b\in\mathbb{R}, c\in\mathbb{R}\right\}$ *(EI 2022-23)*.

Exercice 5. On définit les parties suivantes de $M_2(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \mid a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}, d\in\mathbb{R} \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid c\in\mathbb{R} \right\}.$$

(a) ⧫ Montrer que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont des sous-espaces vectoriels de $M_2(\mathbb{R})$.

(b) ⧫ Montrer que $M_2(\mathbb{R}) = \mathcal{S}\oplus\mathcal{A}$ (i.e. $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont supplémentaires dans $M_2(\mathbb{R})$).

(c) Généraliser à $M_n(\mathbb{R})$ avec $n\geq 2$.

Exercice 6. Soit $F=\{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0)=f(1)=0\}$.

(a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(b) Soit $h\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pour tous a,b dans $\mathbb{R}$, soit $f_{a,b}$ la fonction définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par $f(x)=h(x)-(ax+b)$. Déterminer les valeurs de a et b pour que $f_{a,b}\in F$.

(c) En déduire un supplémentaire de F dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 7. On considère les parties suivantes de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs réelles :

$$F = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = u_{2n+1}\right\} \quad \text{et} \quad G = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = 0\right\}.$$

(a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(b) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Familles de vecteurs

Exercice 8. ♦ Soient $u = (1, 1, 0)$, $v = (4, -2, 6)$ et $w = (1, -2, 3)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

(a) Trouver des nombres réels non tous nuls α, β et γ tels que $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^3}$.

(b) Que peut-on dire de la famille $\{u, v, w\}$?

Exercice 9. ♦ On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs

$$v_1 = (1, 0, 1), \quad v_2 = (4, 1, -4) \quad \text{et} \quad v_3 = (-2, -1, 6).$$

(a) Vérifier que chacune des trois familles $\{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_3\}$ et $\{v_2, v_3\}$ est libre.

(b) Montrer que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est liée.

Exercice 10. On considère les vecteurs $u_1 = (1, -1, 1)$, $u_2 = (-2, 2, -2)$ et $u_3 = (1, 0, -1)$ de $\mathbb{R}^3$.

(a) Peut-on trouver $v \in \mathbb{R}^3$ tel que la famille $\{u_1, u_2, v\}$ soit libre ?

(b) Peut-on trouver $v \in \mathbb{R}^3$ tel que la famille $\{u_1, u_3, v\}$ soit libre ?

Exercice 11. Pour chaque espace vectoriel E ci-dessous, dire si la famille $\mathcal{F}$ est libre ou liée. Justifier.

(a) ♦ $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F} = \{(1, 0, 1), (0, 2, 2), (3, 7, 1)\}$.

(b) ♦ $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$.

(c) ♦ $E = \mathbb{R}^5$ et $\mathcal{F} = \{(1, 2, 1, 2, 1), (2, 1, 2, 1, 2), (1, 0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 1)\}$.

(d) $E = M_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$.

(e) ♦ $E = \mathbb{R}^6$ et $\mathcal{F} = \{(2, 4, 3, -1, 4, -1), (1, 1, 2, 1, 3, 1), (0, -1, 0, 3, 6, 2)\}$,

(f) $E = M_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$,

(g) $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathcal{F} = \{f_1 \colon x \mapsto e^{-x}, f_2 \colon x \mapsto e^{x}, f_3 \colon x \mapsto e^{2x}\}$.

Exercice 11.5. Soit $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ une famille libre d'un espace vectoriel E. Les familles de E suivantes sont-elles libres ? Justifier.

(a) ♦ $\mathcal{F}_1 = \{e_1, 2e_2, e_3\}$, **(b)** ♦ $\mathcal{F}_2 = \{e_1, e_3\}$,

(c) ♦ $\mathcal{F}_3 = \{3e_1 + e_3, e_3, e_2 + e_3\}$,

(d) ♦ $\mathcal{F}_4 = \{2e_1 + e_2, e_1 - 3e_2, e_4, e_2 - e_1\}$.

(e) $\mathcal{F}_1 = \{e_1 - e_2,\ e_2 - e_3,\ e_3 - e_4,\ e_1 - e_4\}$,

(f) $\mathcal{F}_2 = \{e_1 + e_2,\ e_2 + e_3,\ e_3 + e_4,\ e_1 + e_4\}$,

(g) $\mathcal{F}_3 = \{e_1,\ e_1 + e_2,\ e_1 + e_2 + e_3,\ e_1 + e_2 + e_3 + e_4\}$.

Exercice 12. Soient $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ deux familles d'un espace vectoriel E. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses en justifiant par un contre-exemple ou une courte démonstration.

(a) Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont libres et si $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \neq \varnothing$, alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}'$ est libre.

(b) Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ engendrent E et si $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \neq \varnothing$, alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}'$ engendre E.

(c) Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont libres, alors $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$ est libre.

(d) Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ engendrent E, alors $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$ engendre E.

Exercice 13. ♦ On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 = (0, 1, -2, 1), \quad u_2 = (1, 0, 2, -1), \quad u_3 = (3, 2, 2, -1), \quad u_4 = (0, 0, 1, 0).$$

Dire, en justifiant, si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

(a) $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3) = \mathrm{Vect}\left((1, 1, 0, 0), (-1, 1, -4, 2)\right)$.

(b) $(1, 1, 0, 0) \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2) \cap \mathrm{Vect}(u_2, u_3, u_4)$.

(c) $\mathrm{Vect}(u_1, u_2) + \mathrm{Vect}(u_2, u_3, u_4) = \mathbb{R}^4$.

Exercice 14. Dans $\mathbb{R}^3$, soient $F = \mathrm{Vect}\left((2, 3, -1), (1, -1, -2)\right)$ et $G = \mathrm{Vect}\left((3, 7, 0), (5, 0, -7)\right)$. Démontrer que $F = G$.

Exercice 15. ♦ Donner une base de chacun des espaces vectoriels suivants :

(a) $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$. **(b)** $F_2 = \mathrm{Vect}((2, 1), (0, 1), (-3, -1))$.

(c) $F_3 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \leq 2 \text{ et } P(0) = 0\}$.

(d) $F_4 = \left\{\begin{pmatrix} a & a + b \\ 0 & 2a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\right\}$.

Exercice 16. ♦

(a) Soient $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (-2, 1, 0)$ et $v_3 = (1, -3, 1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

(i) Montrer que $\mathcal{D} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Quelles sont les coordonnées des vecteurs $w_1 = (4, -5, 1)$ et $w_2 = (0, 0, 1)$ dans la base $\mathcal{D}$?

(b) On considère dans $\mathbb{R}_3[X]$ les polynômes $P_0 = 1$, $P_1 = X+1$, $P_2 = (X+1)^2$ et $P_3 = (X+1)^3$.

(i) Montrer que $\mathcal{E} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

(ii) Quelles sont les coordonnées des vecteurs $P = X^2$ et $Q = 1 + X + X^2 + X^3$ dans la base $\mathcal{E}$?

Dimension des espaces vectoriels

Exercice 17. ♦

(a) Déterminer la dimension de chacun des espaces vectoriels suivants :

(i) $F_1 = \mathrm{Vect}\,((1, 1, 1), (1, 2, 3), (1, 0, -1))$,

(ii) $F_2 = \mathrm{Vect}\,((1, 0, 0, 0), (1, 2, 0, 0), (1, 2, 3, 0), (1, 2, 3, 4))$,

(iii) $F_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \text{ et } x + 2y + 3z + 4t = 0\}$,

(iv) $F_4 = \mathrm{Vect}\,((1, 0, 2, -1), (0, 1, 3, 2), (1, -1, -1, -3), (1, 2, 8, 3))$.

(b) Déterminer un système d'équations cartésiennes pour F_1, c'est-à-dire, trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur les nombres réels x, y, z pour que le vecteur (x, y, z) soit dans F_1.

(c) Déterminer un système d'équations cartésiennes pour F_4.

Exercice 18. ♦ Dans chacun des cas suivants, déterminer la dimension de F et de G puis préciser s'ils sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$ en justifiant la réponse.

(a) $F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ et } z + t = 0\right\}$
et $G = \{(2a, -a, 0, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$;

(b) $F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = 0 \text{ et } 2z + t = 0\right\}$
et $G = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y - z = 0 \text{ et } y + z + t = 0\right\}$;

(c) $F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ et } x - z + t = 0\right\}$
et $G = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - z = 0 \text{ et } 2x + y + t = 0\right\}$.

Exercice 19. Soit t un paramètre réel.

(a) Pour quelles valeurs de t la famille ordonnée $((1, t), (t, 3))$ est-elle une base de $\mathbb{R}^2$?

(b) Même question avec la famille ordonnée $((1, 0, t), (1, 1, t), (t, 0, 1))$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 20. ♦ Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0 \text{ et } 2x + y + z - t = 0\right\},$$
$$G = \mathrm{Vect}\,((1, -2, 1, 1), (1, 2, -3, 1), (5, -3, -2, 5)).$$

(a) Calculer la dimension de F et justifier que $\dim(G) \geq 2$.

(b) Montrer que $G \subset F$ et en déduire avec la question précédente que $G = F$.

(c) Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 21. Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$F = \left\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid b - 2c + d = 0\right\}$ et $G = \left\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a = d \text{ et } b = 2c\right\}$.

(a) ♦ Trouver une base de F. En déduire sa dimension puis compléter cette base de F pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$.

(b) Mêmes questions pour G puis pour $F \cap G$.

Exercice 22. Soient $u_1 = (2, 1, 0, 1)$ et $u_2 = (0, 1, -1, 1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

(a) Montrer que la famille $\{u_1, u_2\}$ est libre et la compléter en une base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^4$.

On note $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$, $H_1 = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, v_1)$ et $H_2 = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, v_2)$.

(b) Quelle est la dimension de F ? de H_1 ? de H_2 ? de $H_1 + H_2$?

(c) Montrer que $F = H_1 \cap H_2$.

(d) Déterminer une équation cartésienne de H_1 ; c'est-à-dire trouver quatre nombres réels a, b, c, d tels que pour tout vecteur $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on a :

$$u \in H_1 \iff ax + by + cz + dt = 0.$$

Faire de même avec H_2 et en déduire un système d'équations cartésiennes de F.

On note $G = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.

(e) Justifier que l'on a $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$. Soit $u = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Déterminer en fonction de a, b, c, d, les vecteurs $v \in F$ et $w \in G$ tels que $u = v + w$.

Exercice 23. ♦ Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $v_1 = (1, 3, -2, 2)$, $v_2 = (2, 7, -5, 6)$ et $v_3 = (1, 2, -1, 0)$. Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $w_1 = (1, 3, 0, 2)$, $w_2 = (2, 7, -3, 6)$ et $w_3 = (1, 1, 6, -2)$.

(a) Montrer que v_3 est une combinaison linéaire de v_1 et v_2. En déduire que F est engendré par v_1 et v_2. Donner une base de F et les coordonnées de v_3 dans cette base.

(b) Montrer que w_3 est combinaison linéaire de w_1 et w_2. En déduire que G est engendré par w_1 et w_2. Donner une base de G et les coordonnées de w_3 dans cette base.

(c) Montrer que la famille $\{v_1, v_2, w_1, w_2\}$ est liée. En déduire une famille génératrice puis une base de $F + G$.

(d) Soit $E = \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0\big\}$.

- **(i)** Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
- **(ii)** Déterminer une famille génératrice puis une base de E.

(e) Établir l'égalité $E = F + G$. Cette somme est-elle directe ? En déduire la dimension de $F \cap G$ à l'aide d'une formule du cours.

Exercice 24. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie.

(a) Soit F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F. Montrer que F' est un supplémentaire de G dans $F + G$, c'est-à-dire $F' \oplus G = F + G$.

(b) En déduire la formule suivante (vue en cours) :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

(c) Montrer que si $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$, alors on a $E = F \oplus G$.

Extraits d'examens d'années précédentes

Exercice 25 (Extrait de l'examen intermédiaire 2018-2019)**.** Soit E l'ensemble défini par

$$E = \big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ et } x + z - t = 0\big\}$$

et F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $u_1 = (-1, 0, 1, -1)$ et $u_2 = (0, 1, 0, 1)$.

(1) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par deux vecteurs v_1 et v_2 à déterminer.

(2) Donner une base et la dimension de E.

(3) Justifier que $\dim(F) = 2$.

(4) Montrer que la famille $\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ n'est pas libre.

(5) Déterminer une famille génératrice puis une base et la dimension de $E + F$.

(6) **(a)** Vérifier que le vecteur $u_1 + u_2$ appartient à E.

- **(b)** Donner la dimension et une base de $E \cap F$.

(7) Les sous-espaces vectoriels E et F sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$? Justifier.

Exercice 26 (Extrait de l'examen intermédiaire 2019-2020)**.** Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ sa base canonique. On considère les vecteurs suivants de E

$$v_1 = (1, 1, 0, 0), \quad v_2 = (1, 1, 1, 0), \quad v_3 = (1, 1, 1, 1) \quad \text{et} \quad v_4 = (2, 2, 1, 3)$$

et les sous-espaces vectoriels suivants de E

$$F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4) \quad \text{et} \quad G = \big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y = 0\big\}.$$

(1) **(a)** Montrer que $v_4 \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$.

- **(b)** Donner une base de F et déduire la dimension de F.

(2) **(a)** En utilisant la définition du cours, montrer que G est un sous-espace vectoriel de E.

- **(b)** Donner une base de G et déduire la dimension de G.

(3) **(a)** Montrer que le vecteur e_1 n'est pas dans F puis que les vecteurs e_3 et e_4 sont dans $F \cap G$.

- **(b)** Déterminer une base de $F \cap G$ et déduire la dimension de ce sous-espace vectoriel de E.
- **(c)** Montrer que les sous-espaces vectoriels F et G ne sont pas supplémentaires dans E.

(4) Déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.

(5) Trouver un supplémentaire de F dans E.

Exercice 27 (Extrait de l'examen terminal 2022-2023)**.**

Soient $u_1 = (1, 1, -1, 0)$, $u_2 = (0, 1, -1, 1)$, $u_3 = (-1, 0, 2, -1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ et soient

$$F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3) \quad \text{et} \quad G = \{\, (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + t = 0 \ \text{et} \ y + z - 2t = 0 \,\}.$$

(1) **(a)** Déterminer une base de F.

- **(b)** Peut-on compléter la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ pour former une base de $\mathbb{R}^4$? On justifiera la réponse en donnant un énoncé précis du cours.
- **(c)** Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

(2) Déterminer une base de G.

(3) **(a)** Montrer que $u_1 \in G$.

On admet que (u_1) est une base de $F \cap G$. En déduire $\dim(F + G)$ puis que $F + G = \mathbb{R}^4$.

- **(b)** Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Correction des exercices

N'hésitez pas à signaler les inévitables coquilles et à transmettre vos commentaires à Julian Le Clainche ou à Vincent Souveton.

Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Correction de l'Exercice 1.

Dans cet exercice, on doit montrer que les ensembles proposés sont ou non des espaces vectoriels. Pour ce faire, on pourrait vérifier chacun des 8 axiomes définissant un espace vectoriel mais ceci est très long et fastidieux. En général, pour montrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel, on montre que c'est un sous espace vectoriel d'un espace vectoriel connu $(E,+,\cdot)$ ($\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{R}[X]$, $\mathcal{F}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R})$,...). On doit alors vérifier 3 points :

(i) $F \neq \emptyset$,

(ii) F est stable par l'addition $+$,

(iii) F est stable par la multiplication externe $\cdot$.

(1) $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ x+y+z=0, 2x-y+3z=0\}$

- On a $0+0+0=0$ et $2\times 0-0+3\times 0=0$ donc $(0,0,0) \in E_1 \neq \emptyset$
- Soient $u_1=(x_1,y_1,z_1)$ et $u_2=(x_2,y_2,z_2)$ deux éléments de E_1, on pose $v=u_1+u_2=(x,y,z)$.
  D'une part, $x+y+z=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)+(z_1+z_2)=x_1+y_1+z_1+x_2+y_2+z_2=0$ car $u_1,u_2\in E_1$
  D'autre part, $2x-y+3z=2(x_1+x_2)-(y_1+y_2)+3(z_1+z_2)=2x_1-y_1+3z_1+2x_2-y_2+3z_2=0$ car $u_1,u_2\in E_1$
  Donc $v\in E_1$ et E_1 est stable par addition.
- Soient $u=(x,y,z)\in E_1$ et $\lambda\in\mathbf{R}$, on note $v=\lambda\cdot u$
  D'une part, $\lambda x+\lambda y+\lambda z=\lambda(x+y+z)=0$ car $u\in E_1$ D'autre part, $2\lambda x-\lambda y+3\lambda z=\lambda(2x-y+3z)=0$ car $u\in E_1$
  Ainsi, $v=\lambda\cdot u\in E_1$ donc E_1 est stable par multiplication externe.

On a donc montré que E_1 est un sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$, donc c'est un espace vectoriel.

(2) $E_2=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2,\ |x|=|y|\}$
L'ensemble E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$. En effet, l'ensemble E_2 n'est pas stable par addition. Par exemple, si on note $u=(1,1)$ et $v=(-1,1)$, on a $u,v\in E_2$ mais $u+v=(0,2)\notin E_2$ car $|0|=0\neq 2=|2|$

(3) $E_3=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3,\ x-2y+z=0\}\cup\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3,\ x+z=0\}$
Comme on va le voir dans l'exercice 3, une union de sous-espaces vectoriels n'est en général pas un espace vectoriel (penser à la réunion de deux droites non confondues dans le plan). Ce qui fait défaut en général pour la réunion de deux sous-espaces, c'est la stabilité pour l'addition.
On considère $u=(1,1,1)\in\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3,\ x-2y+z=0\}\subset E_3$ et $v=(0,1,0)\in\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3,\ x+z=0\}\subset E_3$, on pose $w=u+v=(1,2,1)$.
On a $1-2\times 2+1=-2\neq 0$ et $1+1=2\neq 0$ donc $w\neq E_3$.
Ainsi E_3 n'est pas stable par l'addition et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

(4) $E_4=\left\{\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\in M_2(\mathbf{R}),\ x_1+x_2=x_4\right\}$

- On a $0+0=0$ donc $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\in E_4\neq\emptyset$
- Soient $M_1=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}$ et $M_2=\begin{pmatrix}y_1&y_2\\y_3&y_4\end{pmatrix}$ deux éléments de E_4, on pose $N=M_1+M_2=\begin{pmatrix}z_1&z_2\\z_3&z_4\end{pmatrix}$.
  On a $z_1+z_2=(x_1+y_1)+(x_2+y_2)=x_1+x_2+y_1+y_2=x_4+y_4=z_4$ donc $N\in E_4$ et E_4 est stable par addition.
- Soient $M=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\in E_4$ et $\lambda\in\mathbf{R}$.
  On a $\lambda x_1+\lambda x_2=\lambda(x_1+x_2)=\lambda x_4$ donc $\lambda\cdot M\in E_4$ et E_4 est stable par multiplication externe.

On a donc montré que E_4 est un sous espace vectoriel de $M_2(\mathbf{R})$, donc c'est un espace vectoriel.

(5) $E_5=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbf{R}),\ ad-bc=1\right\}$
On sait qu'un sous-espace vectoriel F de E contient nécessairement 0_E. De plus, si $(E,+,\cdot)$ est un espace vectoriel et que $(F,+,\cdot)$ aussi, avec $F\subset E$, alors F est nécessairement un sous-espace vectoriel de E. Donc, si un ensemble $H\subset E$ ne contient pas 0_E, alors $(H,+,\cdot)$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $(E,+,\cdot)$, et donc pas un espace vectoriel.
Soit $0=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\in M_2(\mathbf{R})$ la matrice nulle, on a $0\times 0-0\times 0=0\neq 1$ donc $0\notin E_5$ et donc E_5 n'est pas un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbf{R})$.

(6) $E_6=\{P\in\mathbf{R}[X], P(1)=0\}$

- Il est clair que $0\in E_6\neq\emptyset$
- Soient $P,Q\in E_6$, on a $(P+Q)'(1)=P'(1)+Q'(1)=0$ donc $P+Q\in E_6$ et E_6 est stable pour l'addition.

- Soit $P \in E_6$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, $(\lambda P)'(1) = \lambda(P'(1)) = 0$ donc $\lambda P \in E_6$.

On a donc montré que E_6 est un sous espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$, donc c'est un espace vectoriel.

(7) $E_7 = \{P \in \mathbf{R}[X], P(0) = 1\}$
Il est évident que $P_0 = 0 \notin E_7$ car $P_0(0) = 0 \neq 1$. Ainsi, E_7 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$.

Correction de l'Exercice 2.

(1) $E_1 = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq 0\}$
Il est assez clair ici que E_1 n'est pas stable par multiplication par un scalaire. En effet, si on considère par exemple la fonction constante $f = 1$, $f \in E_1$ mais $(-1) \cdot f = -f \cong -1 \notin E_1$ donc E_1 n'est pas stable par multiplication externe donc n'est pas un sous-espace vectoriel.

(2) $E_2 = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f \text{ est impaire}\}$
On rappelle que f impaire signifie que pour tout $x \in \mathbf{R},\ f(-x) = -f(x)$.

- Il est clair que $0 \in E_2 \neq \emptyset$
- Soient $f, g \in E_2$, on pose $h = f + g$.
  Pour $x \in \mathbf{R}$, on a $h(-x) = (f+g)(-x) = f(-x)+g(-x) = -f(x)-g(x) = -h(x)$ et h est impaire donc $h = f+g \in E_2$ et E_2 est stable pour l'addition.
- Soit $f \in E_2$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, pour $x \in \mathbf{R}$, $(\lambda f)(-x) = \lambda(f(-x)) = -\lambda f(x)$ donc $\lambda f \in E_2$.

On a donc montré que E_2 est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, donc c'est un espace vectoriel.

(3) $E_3 = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f \text{ est croissante}\}$
Comme dans le cas de E_1, on va montrer que E_3 n'est pas stable par multiplication externe.
En effet, $f : x \mapsto x$ est croissante donc $f \in E_3$ cependant, $-f : x \mapsto -x$ est strictement décroissante donc $-f \notin E_3$ et E_3 n'est pas stable par multiplication externe.
Ainsi, E_3 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

(4) $E_4 = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \forall x, y \in \mathbf{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y)\}$

- Il est clair que $0 \in E_4 \neq \emptyset$
- Soient $f, g \in E_4$, on pose $h = f + g$.
  Pour $x, y \in \mathbf{R}$, on a $h(x+y) = f(x+y)+g(x+y) = f(x)+f(y)+g(x)+g(y) = h(x) + h(y)$ donc $h = f + g \in E_4$ et E_4 est stable pour l'addition.
- Soit $f \in E_4$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, pour $x, y \in \mathbf{R}$, $(\lambda f)(x+y) = \lambda(f(x+y)) = \lambda(f(x) + f(x)) = \lambda f(x) + \lambda f(y)$ donc $\lambda f \in E_4$ et E_4 est stable par multiplication externe.

On a donc montré que E_4 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

(5) $E_5 = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f \text{ est continue et pour tout } a \geq 0, \int\limits_{-a}^{a} f(t)dt = 0\}$

- Il est clair que $0 \in E_5 \neq \emptyset$
- Soient $f, g \in E_5$, on pose $h = f + g$.
  La fonction h est continue comme somme de fonctions continues et pour $a \geq 0$,
  $\int\limits_{-a}^{a} h(t)dt = \int\limits_{-a}^{a} f(t)dt + \int\limits_{-a}^{a} g(t)dt = 0$ donc $h \in E_5$
- Soit $f \in E_5$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, λf est continue et pour $a \geq 0$ $\int\limits_{-a}^{a} \lambda f(t)dt = \lambda \int\limits_{-a}^{a} f(t)dt = \lambda \times 0 = 0$ donc $\lambda f \in E_5$ et E_4 est stable par multiplication externe.

Ainsi, E_5 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

Correction de l'Exercice 3.

Soit E un espace vectoriel, soient F, G, H trois sous-espaces vectoriels de E

(a) On veut montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E *ssi* ($F \subset G$ ou $G \subset F$).
Pour cela on raisonne par double implication :
$\boxed{\Leftarrow}$
Ce sens est évident. En effet, si $F \subset G$, alors $F \cup G = G$ est un sous-espace vectoriel de E par hypothèse.
$\boxed{\Rightarrow}$
On suppose que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E.
<u>Cas 1</u> : $F \subset G$ alors on a le résultat
<u>Cas 2</u> : $F \not\subset G$
On va montrer que $G \subset F$. Par hypothèse, il existe $x \in F$ tel que $x \notin G$.
Soit $y \in G$, on a $x + y \in F \cup G$ car $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E.

- Si $x + y \in G$, alors $x = (x + y) - y \in G$ car G est un sous-espace vectoriel de E Or par définition, $x \notin G$ ceci est donc absurde.
- On a donc $x + y \in F$ et alors, $y = (x + y) - x \in F$ car F est un sous-espace vectoriel de E.

On a donc montré que si $y \in G$ alors $y \in F$ autrement dit $G \subset F$.
On a bien prouvé l'équivalence annoncée.

(b) On veut montrer que si K est un sous-espace vectoriel de E tel que $F \subset K$ et $G \subset K$ alors $F + G \subset K$.

Soit K un tel sous-espace vectoriel de E.

Soit $z \in F + G$, alors il existe $x \in F$ et $y \in G$ tels que $z = x + y$.

Par hypothèse sur K, on a $x \in K$ et $y \in K$ or K étant un sous-espace vectoriel de E, on a $z = x + y \in K$ d'où le résultat.

(c)

- Soit $z \in (F \cap G) + (F \cap H)$, par définition, il existe $x \in F \cap G$ et $y \in F \cap H$ tels que $z = x + y$.
  D'une part, $x, y \in F$ or F est un sous-espace vectoriel de E donc $z = x+y \in F$,
  d'autre part, $x \in G$ et $y \in H$ donc $z = x + y \in G + H$.
  Ainsi, on a $z \in F \cap (G + H)$ et on a montré l'inclusion de sous-espaces demandée.
- On considère l'espace $E = \mathbf{R}^2$, on pose $F = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ x = 0\}$, $G = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ y = 0\}$ et $H = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ x = y\}$.
  On a d'une part $(F \cap G) = 0$ et $(F \cap H) = 0$ donc $(F \cap G) + (F \cap H) = 0$.
  D'autre part, $G + H = \mathbf{R}^2$ donc $F \cap (G + H) = F = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ x = 0\}$ et l'inclusion est stricte.

Correction de l'Exercice 4.

Pour montrer que deux sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E, on doit vérifier les deux points suivants :

* *$F \cap G = \{0\}$, on dit alors que F et G sont en somme directe noté $F + G = F \oplus G$*
* *$E = F + G$, autrement dit, tout élément x de E peut s'écrire $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$.*

En général, montrer le deuxième point est plus difficile

(a) $E = \mathbf{R}^2,\ F = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y = 0\},\ G = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = y\}$

- Montrons que $F \cap G = \{0\}$. On sait que $F \cap G$ est un sous espace vectoriel de E donc $0 \in F \cap G$ et il suffit de montrer que $F \cap G \subset \{0\}$.
  Soit $(x, y) \in F \cap G$, on a alors $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$, autrement dit, $x = y$ et $x = -y$.
  On en déduit alors $x = -x$ et donc $x = 0$ puis $x = y$ donne $y = 0$.
  On a donc montré que $F \cap G = \{0\}$.
- Montrons que $F + G = E$
  De manière générale, pour montrer que $F + G = E$, on raisonne par analyse-synthèse. L'analyse consiste à considérer un élément $x \in E$ et une décomposition $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$ et a déduire des conditions sur y et z. La synthèse consiste à vérifier que des éléments y et z vérifiant les conditions trouvées vérifient $x = y + z$, $y \in F$ et $z \in G$.
  L'analyse peut ne pas figurer sur votre copie, vous pouvez la faire au brouillon et ne reporter que la "synthèse" sur votre copie (sans la nommer ainsi).

  On raisonne par analyse-synthèse
  Analyse Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on suppose que $(x, y) = (a, b) + (u, v)$ avec $(a, b) \in F$ et $(u, v) \in G$. On a alors, par définition de F et G, $b = -a$ et $u = v$. D'où
  $\begin{cases} x = a + u \\ y = b + v = u - a \end{cases}$
  On en déduit alors $u = v = \frac{x+y}{2}$ et $a = -b = \frac{x-y}{2}$.
  Synthèse Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on pose $e_1 = (\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2})$ et $e_2 = (\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2})$
  → On a $(x, y) = e_1 + e_2$,
  → Clairement, $e_1 \in F$ et $e_2 \in G$.
  On a donc $\mathbf{R}^2 = F + G$.

Finalement, on a montré que $\mathbf{R}^2 = F \oplus G$.

(b) $E = \mathbf{R}^3,\ F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - y + z = 0\},\ G = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$

Ici, les deux espaces ne sont pas supplémentaires dans E car ils ne sont pas en somme directe ($F \cap G \neq \{0\}$). En effet, F et G sont des plans distincts dans $\mathbf{R}^3$ et on sait que l'intersection de deux tels plans est soit vide, soit une droite. Or le premier cas est exclu car les deux plans contiennent le point $(0, 0, 0)$ (ce sont des sous-espaces vectoriels).

Pour s'en convaincre, déterminons l'équation de cette droite. Soit $(x, y, z) \in F \cap G$,

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x = 0 \\ y = z \end{cases}$$

Donc $F \cap G = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x = 0,\ y = z\}$ est la droite dirigée par le vecteur $(0, 1, 1)$. En particulier $F \cap G \neq \{0\}$, donc F et G ne sont pas en somme directe donc ne sont pas supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$

(c) $E = \mathbf{R}[X],\ F = \{P \in \mathbf{R}[X] \mid P''(X) = 0\},\ G = \{P \in \mathbf{R}[X] \mid P(0) = P'(0) = 0\}$

- Montrons que $F \cap G = \{0\}$.
  Soit $P \in F \cap G$, on a alors $P''(X) = 0$ donc P est de degré inférieur ou égal à 1, autrement dit, il existe $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $P = aX + b$. Or $P(0) = a = 0$ et $P'(0) = b = 0$ car $P \in G$. D'où $P = 0$ et donc $F \cap G = \{0\}$.
- Montrons que $F + G = E$
  On raisonne par analyse-synthèse
  Analyse Soit $P \in \mathbf{R}[X]$, on suppose que $P = P_1 + P_2$ avec $P_1 \in F$ et $P_2 \in G$

— Cas 1 $deg(P) < 2$,
On a alors $P''(X) = 0 = P_1''(X) + P_2''(X) = P_2''(X)$ car $P_1 \in F$. On a alors $P_2 \in F \cap G$ donc $P_2 = 0$ et $P_1 = P$.

— Cas 2 $deg \geq 2$,
On note $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, $P_1 = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$ et $P_2 = \sum_{i=0}^{n} c_i X^i$.
On a $P(0) = a_0 = P_1(0) = b_0$ car $P_2 \in G$ et de même $b_1 = a_1$.
De plus, $P_1''(X) = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)b_k X^{k-2} = 0$ donc pour $k \geq 2$, on a $b_k = 0$ et $P_1 = a_1 X + a_0$.
Enfin, $P_2 = P - P_1 = \sum_{i=2}^{n} a_i X^i$

Synthèse Soit $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbf{R}[X]$, on pose $P_1 = a_1 X + a_0$ et $P_2 = \sum_{i=2}^{n} a_i X^i$

→ On a $P = P_1 + P_2$,
→ Puisque $deg(P_1) \leq 1$, on a $P_1'' = 0$ et donc $P_1 \in F$
→ Il est immédiat que $P_2(0) = P_2'(0) = 0$ donc

On a donc $\mathbf{R}[X] = F + G$.

Finalement, on a montré que $\mathbf{R}[X] = F \oplus G$.

(d) $E = \mathbf{R}^4$, $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$, $G = \{(x, x, x, x) \in \mathbf{R}^4 \mid x \in \mathbf{R}\}$

- Montrons que $F \cap G = \{0\}$.
  Soit $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in F \cap G$, puisque $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in G$, on a $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$. De plus, $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_1, x_1, x_1) \in F$ donc $x_1 + ... + x_1 = 4 \times x_1 = 0$, d'où $x_1 = 0$.
  Ainsi $F \cap G = \{0\}$.
- Montrons que $F + G = \mathbf{R}^4$, on raisonne par analyse-synthèse.
  Analyse
  Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$, on suppose que $x = (d, d, d, d) + (y_1, y_2, y_3, y_4)$ avec $(d, d, d, d) \in G$ et $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in F$.
  On a $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \times d + (y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 4 \times d$ car $y \in H$.
  Donc $d = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} x_i$ et $y = x - (d, d, d, d)$.
  Synthèse
  Soit $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$, on pose $d = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} x_i$ et $y = x - (d, d, d, d)$.

  → Au vu de la définition de h, on a clairement $x = (d, d, d, d) + h$,
  → par définition de G, on a $(d, d, d, d) \in D$,
  → on note $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, on a $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = (y_1 - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} x_i) + (x_2 - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} x_i) + (x_3 - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} x_i) + (x_4 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{4} x_i) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 4 \times \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} = 0$ donc $y \in F$.

  On a donc montré que $\mathbf{R}^4 = F + G$ et finalement, $\mathbf{R}^4 = F \oplus G$.

(e) $E = \mathbb{R}^4$, $F = \{(a, 2a, 3a) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R}\}$, $G = \{(b, b+c, 2c) \in \mathbb{R}^3 \mid b, c \in \mathbb{R}\}$

- Soit $u \in F \cap G$. Alors, il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $u = (a, 2a, 3a)$ et $b, c \in \mathbf{R}$ tels que $u = (b, b+c, 2c)$. Ainsi,

$$\begin{cases} a = b \\ 2a = b + c \\ 3a = 2c \end{cases} \iff \begin{cases} a - b = 0 \\ 2a - b - c = 0 \\ 3a - 2c = 0 \end{cases} \overset{\text{Pivot}}{\iff} \begin{cases} a - b = 0 \\ b - c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

  Donc $F \cap G \subset \{0_{\mathbf{R}^3}\}$. Comme $\{0_{\mathbf{R}^3}\} \subset F \cap G$ (F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$), alors on a finalement $F \cap G = \{0_{\mathbf{R}^3}\}$
- Comme l'intersection entre F et G est réduite à l'espace trivial $\{0_{\mathbf{R}^3}\}$, alors F et G sont bien en somme directe *(attention, en somme directe $\neq$ supplémentaires)*. Pour voir s'ils sont supplémentaires, il reste donc à montrer que $F + G = \mathbf{R}^3$. On a déjà l'inclusion évidente $F + G \subset \mathbf{R}^3$, puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$. On va montrer que $\mathbf{R}^3 \subset F + G$ en procédant à une analyse-synthèse.

Analyse : on suppose que tout vecteur $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ peut s'écrire comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. Cela revient à dire qu'il existe des réels a, b et c tels que :

$(x, y, z) = (a, 2a, 3a) + (b, b+c, 2c)$

$$\iff \begin{cases} a + b = x \\ 2a + b + c = y \\ 3a + 2c = z \end{cases} \overset{\text{Pivot}}{\iff} \begin{cases} a + b = x \\ -b + c = y - 2x \\ -c = z - 3y + 3x \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2x - 2y + z \\ b = -x + 2y - z \\ c = -3x + 3y - z \end{cases}$$

Synthèse : On reprend les résultats de la partie analyse. Tout vecteur $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}(x,y,z) =& (\overbrace{2x-2y+z}^{a}, \overbrace{2(2x-2y+z)}^{2a}, \overbrace{3(2x-2y+z)}^{3a}) \\ &+ (\underbrace{-x+2y-z}_{b}, \underbrace{(-x+2y-z)+(-3x+3y-z)}_{b+c}, \underbrace{2(-3x+3y-z)}_{2c})\end{aligned}$$

avec

— $(2x-2y+z, 2(2x-2y+z), 3(2x-2y+z)) \in F$

— $(-x+2y-z, (-x+2y-z)+(-3x+3y-z), 2(-3x+3y-z)) \in G$

Donc $\mathbf{R}^3 \subset F+G$. En conclusion, on a montré que $F+G=\mathbf{R}^3$ et $F\cap G = \{0_{\mathbf{R}^3}\}$. Cela prouve que F et G sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.

Correction de l'Exercice 5.

On définit les sous-ensembles de $M_2(\mathbf{R})$ suivant :

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b,d \in \mathbf{R} \right\} \text{ et } \mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; c \in \mathbf{R} \right\}$$

(a) Montrons que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont des sous-espaces vectoriels de $M_2(\mathbf{R})$

$\boxed{\mathcal{S}}$

- Il est clair que $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{S} \neq \emptyset$.
- Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & d' \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$, on pose $N = M+M' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

  On a $\beta = b+b'$ et $\gamma = b+b'$ donc $N = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$ et $\mathcal{S}$ est stable pour l'addition.
- Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $\lambda M = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda b & \lambda d \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$ donc $\mathcal{S}$ est stable par multiplication externe.

Finalement, on a montré que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbf{R})$.

$\boxed{\mathcal{A}}$

- Il est clair que $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A} \neq \emptyset$.
- Pour $M = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} 0 & -c' \\ c' & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$, on pose $N = M+M' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

  On a $\alpha = 0+0 = 0$, $\delta = 0+0 = 0$, $\beta = -c-c'$ et $\gamma = c+c'$ donc $N = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{A}$ est stable pour l'addition.
- Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $\lambda M = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda c \\ \lambda c & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$ donc $\mathcal{A}$ est stable par multiplication externe.

Finalement, on a montré que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbf{R})$.

(b) Montrons que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont supplémentaires dans $M_2(\mathbf{R})$.

- Montrons que $\mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \{0\}$.

  Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{S} \cap \mathcal{A}$. Puisque $M \in \mathcal{A}$, on a $x = t = 0$ et $y = -z$. De plus, $M \in \mathcal{S}$ donc $y = z$.

  On en déduit alors $y = -y$ et donc $y = 0$ puis $z = y$ donne $z = 0$.

  On a donc montré que $\mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \{0\}$.
- Montrons que $\mathcal{S} + \mathcal{A} = M_2(\mathbf{R})$

  On raisonne par analyse-synthèse

  Analyse

  Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$, on suppose que $M = S + A$ avec $S \in \mathcal{S}$ et $A \in \mathcal{A}$.

  par définition, il existe $a,b,c,d \in \mathbf{R}$ tels que

  $$S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

  .

  On a alors

  $$\begin{cases} x = a \\ y = b - c \\ z = b + c \\ t = d \end{cases} \iff \begin{cases} a = x \\ d = t \\ b = \dfrac{y+z}{2} \\ c = \dfrac{z-y}{2} \end{cases}$$

  Donc $S = \begin{pmatrix} x & \frac{y+z}{2} \\ \frac{y+z}{2} & t \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{z-y}{2} \\ \frac{z-y}{2} & 0 \end{pmatrix}$

  Synthèse

  Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$, on pose $S = \begin{pmatrix} x & \frac{y+z}{2} \\ \frac{y+z}{2} & t \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{z-y}{2} \\ \frac{z-y}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

  → Il est clair que $A + S = M$

  → Par définition, on a $A \in \mathcal{A}$ et $S \in \mathcal{S}$

Finalement, on a montré que $M_2(\mathbf{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.

(c) Pour $n \geq 2$, on définit $\mathcal{S}_n(\mathbf{R}) = \{M = (m_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in M_n(\mathbf{R}) \mid m_{ij} = m_{ji} \forall 1 \leq i,j \leq n\}$ et $\mathcal{A}_n(\mathbf{R}) = \{M = (m_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in M_n(\mathbf{R}) \mid m_{ij} = -m_{ji} \forall 1 \leq i,j \leq n\}$

Il est clair que ces deux ensembles sont des généralisations des ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{S}$ des questions précédentes. De plus, on peut montrer que ces deux ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbf{R})$ exactement comme dans la question 1.

On va à présent montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ sont supplémentaires dans $M_n(\mathbf{R})$.

- La même preuve qu'à la question précédente nous montre que $\mathcal{S}_n(\mathbf{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbf{R}) = \{0\}$.
- Montrons que $\mathcal{S}_n(\mathbf{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbf{R}) = M_n(\mathbf{R})$

  On raisonne par analyse-synthèse

  Analyse

  Soit $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbf{R})$, on suppose que $M = S + A$ avec $S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$.

  On note $S = (s_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, on a donc $a_{ij} = -a_{ji}$ et $s_{ij} = s_{ji}$ pour $1 \leq i,j \leq n$.

  On a alors

  $$m_{ij} = a_{ij} + s_{ij} \implies m_{ij} + m_{ji} = 2s_{ij} \text{ et } m_{ij} - m_{ji} = 2a_{ij}.$$

  Donc $S = (\frac{m_{ij}+m_{ji}}{2})_{1\leq i,j\leq n}$ et $A(\frac{m_{ij}-m_{ji}}{2})_{1\leq i,j\leq n}$.

  Synthèse

  Soit $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbf{R})$, on pose $S = (\frac{m_{ij}+m_{ji}}{2})_{1\leq i,j\leq n}$ et $A(\frac{m_{ij}-m_{ji}}{2})_{1\leq i,j\leq n}$.

  $\rightarrow$ Il est clair que $A + S = M$

  $\rightarrow$ Par définition, on a $A \in \mathcal{A}$ et $S \in \mathcal{S}$

Finalement, on a montré que $\mathcal{S}_n(\mathbf{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbf{R}) = M_n(\mathbf{R})$.

Correction de l'Exercice 6.

On considère $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R}) \mid f(0) = f(1) = 0\}$

(a) On va montrer que F est une sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})$

- Clairement la fonction nulle vérifie $f(0) = f(1) = 0$ donc $0 \in F \neq 0$
- Soient $f, g \in F$, on pose $h = f + g$. On a $h(0) = (f+g)(0) = f(0) + g(0) = 0$ et de la même manière, $h(1) = 0$ donc $h \in F$ et F est stable pour l'addition
- Soit $f \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $(\lambda f)(0) = \lambda(f(0)) = 0$ et de même, $\lambda f(1) = 0$ donc $\lambda f \in F$ et F est stable pour la multiplication externe.

On a donc montré que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})$.

(b) On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse

Soit $h \in \mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})$, on suppose qu'il existe $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $f : x \mapsto h(x) - (ax + b) \in F$.

On a $f(0) = 0 = h(0) - b$ donc $b = h(0)$.

On a également $f(1) = 0 = h(1) - a - b = h(1) - h(0) - a$ donc $a = h(1) - h(0)$.

Synthèse

Soit $h \in \mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})$, on pose $a = h(1) - h(0)$ et $b = h(0)$. On définit f par $f(x) = h(x) - (ax + b)$.

On a $f(0) = h(0) - (a \times 0 + b) = h(0) - b = 0$ et $f(1) = h(1) - (h(1) - h(0) + h(0) = 0$.

Ainsi $f \in F$.

(c) On note $\text{Aff}(\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions affines sur $\mathbf{R}$. On va vérifier que $\text{Aff}(\mathbf{R})$ est un supplémentaire de F dans $\mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})$.

La question précédente nous permet d'affirmer que $F + \text{Aff}(\mathbf{R}) = \mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})$. Il nous reste donc à prouver que la somme est directe ($F \cap \text{Aff}(\mathbf{R}) = \{0\}$).

Soit $f \in F \cap \text{Aff}(\mathbf{R})$, puisque f est une fonction affine, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b$. Or $f \in F$ donc $b = f(0) = 0$ et $a + b = f(1) = 0$ donc $a = b = 0$ et finalement, la fonction f est nulle. Donc $F \cap \text{Aff}(\mathbf{R}) = \{0\}$.

On a donc montré que $\text{Aff}(\mathbf{R})$ et F sont supplémentaires dans $\mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})$.

Correction de l'Exercice 7.

On considère les sous-ensembles suivant :

$$F = \left\{u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \;\middle|\; \forall n \in \mathbf{N},\ u_{2n} = u_{2n+1}\right\} \text{ et } G = \left\{u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \;\middle|\; \forall n \in \mathbf{N},\ u_{2n} = 0\right\}$$

(a) Montrons que F et G sont des sous-espaces vectoriels de l'ensemble des suites à valeurs réelles $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

$\boxed{F}$

- Soit $u = 0$ la suite nulle, elle vérifie clairement $u_{2n} = u_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ donc $0 \in F \neq \emptyset$.
- Soit $u, v \in F$, on note $w = u + v$.

  Pour $n \in \mathbf{N}$, $w_{2n} = u_{2n} + v_{2n} = u_{2n+1} + v_{2n+1} = w_{2n+1}$ donc $w = u + v \in F$ et F est stable par addition.
- Soit $u \in F$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, pour $n \in \mathbf{N}$, on a $(\lambda u)_{2n} = \lambda u_{2n} = \lambda u_{2n+1} = (\lambda u)_{2n+1}$ donc $\lambda u \in F$ et F est stable par multiplication externe.

Finalement, on a montré que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

$\boxed{G}$

- Soit $u = 0$ la suite nulle, elle vérifie clairement $u_{2n} = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ donc $0 \in G \neq \emptyset$.
- Soit $u, v \in G$, on note $w = u + v$.

  Pour $n \in \mathbf{N}$, $w_{2n} = u_{2n} + v_{2n} = 0 + 0 = 0$ donc $w = u + v \in G$ et G est stable par addition.
- Soit $u \in G$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, pour $n \in \mathbf{N}$, on a $(\lambda u)_{2n} = \lambda u_{2n} = \lambda \times 0 = 0$ donc $\lambda u \in G$ et G est stable par multiplication externe.

Finalement, on a montré que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

(b) Montrons que F et G sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$

- Montrons que $F \cap G = \{0\}$.
Soit $u \in F \cap G$, puisque $u \in G$, on a pour $n \in \mathbf{N}$ $u_{2n} = 0$. Or $u \in F$ donc pour $n \in \mathbf{N}$, $u_{2n+1} = u_{2n} = 0$.
Finalement, on a $u_n = 0$ $\forall n \in \mathbf{N}$ et donc $u = 0$.
Ainsi, on a vérifié que $F \cap G = \{0\}$.
- Montrons que $\mathbf{R}^{\mathbf{N}} = F + G$.
On raisonne par analyse-synthèse.
<u>Analyse</u>
Soit $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, on suppose que $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$.
Pour $n \in \mathbf{N}$, on a $u_{2n} = v_{2n} + w_{2n} = v_{2n}$ car $w \in G$ et $v_{2n+1} = v_{2n} = u_{2n}$.
On a également $w_{2n+1} = u_{2n+1} - v_{2n+1} = u_{2n+1} - u_{2n}$.
<u>Synthèse</u>
Soit $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, soit $v, w \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ définies par $v_{2n} = v_{2n+1} = u_{2n}$ pour $n \in \mathbf{N}$ et $w = u - v$.
  - → La définition de v et w donne immédiatement $u = v + w$,
  - → par définition, il est clair que $v \in F$,
  - → pour $n \in \mathbf{N}$, on a $w_{2n} = u_{2n} - v_{2n} = 0$ par définition de v donc $w \in G$.

  On a donc montré que $F + G = \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$

Finalement, on a $\mathbf{R}^{\mathbf{N}} = F \oplus G$.

Familles de vecteurs

Correction de l'Exercice 8.

(a) $$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0_{\mathbf{R}^3} \iff \begin{cases} \alpha + 4\beta + \gamma = 0 \\ \alpha - 2\beta - 2\gamma = 0 \\ 6\beta + 3\gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \gamma = -2\beta \\ \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \gamma = -2\beta \\ \alpha = -2\beta. \end{cases}$$
On obtient donc une solution en posant par exemple $\beta = -1$. On a alors $\alpha = 2$ et $\gamma = 2$ et on vérifie qu'on a bien
$$2u - v + 2w = 0_{\mathbf{R}^3}.$$

(b) D'après la question précédente, la famille $\{u; v; w\}$ est donc liée.

Correction de l'Exercice 9.

(a) *Pour montrer qu'une famille de <u>deux</u> vecteurs est libre, il suffit de s'assurer que les deux vecteurs qui la composent ne sont pas colinéaires.* Ici,
- — v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires $\left(\frac{1}{4} \neq \frac{0}{1}\text{, par exemple}\right)$ donc la famille $\{v_1, v_2\}$ est libre.
- — v_1 et v_3 ne sont pas colinéaires $\left(\frac{1}{-2} \neq \frac{0}{-1}\text{, par exemple}\right)$ donc la famille $\{v_1, v_3\}$ est libre.
- — v_2 et v_3 ne sont pas colinéaires $\left(\frac{4}{-2} \neq \frac{1}{-1}\text{, par exemple}\right)$ donc la famille $\{v_2, v_3\}$ est libre.

(b) On remarque facilement que $v_3 + v_2 - 2v_1 = 0_{\mathbf{R}^3}$ donc la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est liée.

Correction de l'Exercice 10.

(a) La famille $\{u_1, u_2\}$ est liée (car $u_2 = -2u_1$) donc pour n'importe quel vecteur v de $\mathbf{R}^3$, la famille $\{u_1, u_2, v\}$ sera liée aussi. C'est impossible.

(b) La famille de 2 vecteurs $\{u_1, u_3\}$ est libre $\left(\frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1}\text{, par exemple}\right)$ dans un espace de dimension 3 donc, d'après le théorème de la base incomplète, on peut la compléter en une base (donc une famille libre) de $\mathbf{R}^3$. Par exemple, prendre le vecteur $v = (0, 0, 1)$. *En général, pour compléter une famille libre en une base de $\mathbf{R}^n$, on ne s'embête pas et on choisit des vecteurs de la base canonique.*

Correction de l'Exercice 11.

(a) Pour $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$, on a
$$\alpha(1,0,1) + \beta(0,2,2) + \gamma(3,7,1) = 0_{\mathbf{R}^3} \iff \begin{cases} \alpha + 3\gamma = 0 \\ 2\beta + 7\gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + 3\gamma = 0 \\ 2\beta + 7\gamma = 0 \\ 2\beta - 2\gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + 3\gamma = 0 \\ \beta = -\frac{7}{2}\gamma = 0 \\ \beta = \gamma \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \alpha = -3\gamma = 0 \end{cases}$$

Ainsi, on a montré que $\alpha(1,0,1)+\beta(0,2,2)+\gamma(3,7,1)=0_{\mathbf{R}^3} \iff \alpha=\beta=\gamma=0$. La famille $\{(1,0,1),(0,2,2),(3,7,1)\}$ est donc libre.

(b) On remarque que $(1,0,0)+(0,1,1)=(1,1,1)$, autrement dit $(1,0,0)+(0,1,1)-(1,1,1)=0_{\mathbf{R}^3}$ et la famille $\{(1,0,0),(0,1,1),(1,1,1)\}$ est donc liée.

(c) On remarque que $(1,2,1,2,1)+(2,1,2,1,2)-3(1,0,1,1,0)-3(0,1,0,0,1)=0_{\mathbf{R}^5}$ et la famille $\{(1,2,1,2,1),(2,1,2,1,2),(1,0,1,1,0),(0,1,0,0,1)\}$ est donc liée.

(d) Pour $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$, on a

$$\alpha\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}=0_{M_2(\mathbf{R})} \iff \begin{cases}\alpha+\beta=0\\-\alpha=0\\\alpha-\gamma=0\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}\beta=-\alpha\\\alpha=0\\\gamma=\alpha\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\\\gamma=0\end{cases}$$

Ainsi, on a montré que $\alpha\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}=0_{M_2(\mathbf{R})} \iff \alpha=\beta=\gamma=0$ et donc la famille $\mathcal{F}$ est libre.

(e) Libre. En effet,

$$\alpha(1,1,2,1,3,1)+\beta(2,4,3,-1,4,-1)+\gamma(0,-1,0,3,6,2)=(0,0,0,0,0,0)$$
$$\iff \begin{cases}\alpha+2\beta+0\gamma=0\\\alpha+4\beta-\gamma=0\\2\alpha+3\beta+0\gamma=0\\\alpha-\beta+3\gamma=0\\3\alpha+4\beta+6\gamma=0\\\alpha-\beta+2\gamma=0\end{cases} \implies \begin{cases}\alpha=-2\beta\\\gamma=2\beta\\-\beta=0\end{cases} \implies \begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\\\gamma=0\end{cases}$$

(f) Liée. En effet, $2\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&3\\-2&1\end{pmatrix}=0$.

(g) Libre. Posons $f_k\colon x\mapsto e^{kx}$. La relation $\alpha f_{-1}+\beta f_1+\gamma f_2=0$ évaluée en $x=0$, $x=1$ et $x=-1$ donne le système :

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\\alpha e^{-1}+\beta e-\gamma e^2=0\\\alpha e^1+\beta e^{-1}+\gamma e^{-2}=0\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\\\gamma=0\end{cases}$$

grâce à l'application du pivot de Gauss.

Correction de l'Exercice 115.

(a) Soient $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$ tels que $\alpha e_1+2\beta e_2+\gamma e_3=0_E$. La famille $\{e_1,e_2,e_3\}$ est libre comme sous-famille d'une famille libre et donc $\alpha=2\beta=\gamma=0$. Autrement dit, on a $\alpha=\beta=\gamma=0$ et donc la famille $\mathcal{F}_1$ est libre.

(b) La famille $\mathcal{F}_2$ est libre comme sous-famille d'une famille libre.

(c) En utilisant la liberté de $\{e_1,e_2,e_3\}$, on a

$$\alpha(3e_1+e_3)+\beta e_3+\gamma(e_2+e_3)=0_E \iff 3\alpha e_1+\gamma e_2+(\alpha+\beta+\gamma)e_3=0_E$$
$$\iff \begin{cases}3\alpha=0\\\gamma=0\\\alpha+\beta+\gamma=0\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\\\gamma=0\end{cases}$$

Ainsi, la famille $\mathcal{F}_3$ est libre.

(d) En utilisant la liberté de $\{e_1,e_2,e_4\}$, on a

$$\alpha(2e_1+e_2)+\beta(e_1-3e_2)+\gamma e_4+\delta(e_2-e_1)=0_E$$
$$\iff (2\alpha+\beta-\delta)e_1+(\alpha-3\beta+\delta)e_2+\gamma e_4=0_E$$
$$\iff \begin{cases}2\alpha+\beta-\delta=0\\\alpha-3\beta+\delta=0\\\gamma=0\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}\alpha-3\beta+\delta=0\\7\beta-3\delta=0\\\gamma=0\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}\alpha-3\beta+\delta=0\\\beta=\frac{3}{7}\delta\\\gamma=0\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}\alpha=\frac{2}{7}\delta\\\beta=\frac{3}{7}\delta\\\gamma=0\end{cases}$$

Ainsi, une solution non nulle du système est donnée par $\alpha=2,\beta=3,\gamma=0,\delta=7$ et la famille $\mathcal{F}_4$ est donc liée.

(e) Liée. En effet, $1\cdot(e_1-e_2)+1\cdot(e_2-e_3)+1\cdot(e_3-e_4)-1\cdot(e_1-e_4)=0$.

(f) Liée. On remarque que $1\cdot(e_1+e_2)-1\cdot(e_2+e_3)+1\cdot(e_3+e_4)-1\cdot(e_1+e_4)=0$.

(g) Libre. Pour le voir, il suffit de trouver les solutions du système suivant :

$$\alpha \cdot e_1 + \beta \cdot (e_1+e_2) + \gamma \cdot (e_1+e_2+e_3) + \mu \cdot (e_1+e_2+e_3+e_4) = 0$$
$$\iff (\alpha+\beta+\gamma+\mu)\cdot e_1 + (\beta+\gamma+\mu)\cdot e_2 + (\gamma+\mu)\cdot e_3 + \mu e_4 = 0$$

Or, la famille $\mathcal{F}_3$ est libre. Cela équivaut donc au système échelonné :

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma+\mu = 0 \\ \beta+\gamma+\mu = 0 \\ \gamma+\mu = 0 \\ \mu = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$$

Correction de l'Exercice 12.

(a) C'est vrai. On a $\mathcal{F}\cap\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$, avec $\mathcal{F}$ une famille libre. Ainsi, pour tout $p \in \mathbf{N}\backslash\{0\}$, et pour tous vecteurs $u_1,...,u_p \in \mathcal{F}\cap\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$,

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0 \iff \lambda_i = 0, \quad \forall i \in \{1,...,p\}.$$

(b) C'est faux. Dans l'espace vectoriel $E = \mathbf{R}^2$, prenons $\mathcal{F} = \{(1,0),(1,1)\}$ et $\mathcal{F}' = \{(0,1),(1,1)\}$. On montre facilement que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ engendrent E. Pourtant, $\mathcal{F}\cap\mathcal{F}' = \{(1,1)\}$ n'est pas génératrice de E.

(c) C'est faux. Reprendre exactement le même exemple que précédemment pour s'en convaincre : dans ce cas, $\mathcal{F}\cup\mathcal{F}' = \{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ n'est pas libre car $(1,1) = (1,0)+(0,1)$.

(d) C'est vrai. Pour tout vecteur $u \in E$, puisque la famille $\mathcal{F}$ est génératrice de E, il existe des réels $\lambda_1,...,\lambda_p$ et des vecteurs $u_1,...,u_p \in \mathcal{F} \subset \mathcal{F}\cup\mathcal{F}'$ tels que $u = \lambda_1 u_1 + ... + \lambda_p u_p$. Ainsi, tout vecteur de E peut s'exprimer comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{F}\cup\mathcal{F}'$. Donc cette dernière est génératrice.

Correction de l'Exercice 13.

(a) On note $v_1 = (1,1,0,0)$ et $v_2 = (-1,1,-4,2)$. On veut montrer que $\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3) = \mathrm{Vect}(v_1,v_2)$, pour ce faire, on raisonne par double inclusion.

Pour montrer que $\mathrm{Vect}(v_1,v_2) \subset F$ où F est un sous-espace vectoriel de $E (= \boldsymbol{R}^4$ ici), il suffit de vérifier que $v_1, v_2 \in F$. En effet, par définition $\mathrm{Vect}(v_1,v_2)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant les vecteurs v_1 et v_2 donc si ces vecteurs sont contenus dans le ***sous-espace vectoriel*** *F alors nécessairement $\mathrm{Vect}(v_1,v_2) \subset F$.*

Ici, on commence donc par montrer que les vecteurs v_1 et v_2 sont dans $\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)$, c'est à dire qu'ils s'écrivent comme combinaison linéaire des vecteurs u_1, u_2 et u_3

On remarque que $v_1 = u_1+u_2$ et $v_2 = u_1-u_2$ ainsi, on a $v_1, v_2 \in \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)$ et donc d'après la remarque ci-dessus, on a $\mathrm{Vect}(v_1,v_2) \subset \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)$.

Montrons maintenant la deuxième inclusion, à savoir $\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3) \subset \mathrm{Vect}(v_1,v_2)$.

En utilisant les expressions de v_1 et v_2 comme combinaisons linéaires de u_1 et u_2, on obtient $u_1 = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2$ et $u_2 = \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2$. On cherche $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ tels que

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = u_3 \iff \begin{cases} \alpha - \beta = 3 \\ \alpha+\beta = 2 \\ -4\beta = 2 \\ 2\beta = -1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \alpha = \beta + 3 \\ \alpha = 2-\beta \\ \beta = -\frac{1}{2} \\ \beta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \beta = -\frac{1}{2} \\ \alpha = \frac{5}{2} \end{cases}$$

ainsi $u_3 = -\frac{1}{2}v_2 + \frac{5}{2}v_1$. On a donc montré que $u_1,u_2,u_3 \in \mathrm{Vect}(v_1,v_2)$ et donc $\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3) \subset \mathrm{Vect}(v_1,v_2)$.

Finalement, on a $\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3) = \mathrm{Vect}(v_1,v_2)$ et l'affirmation est donc $\boxed{\textbf{VRAIE}}$.

Ici, on aurait pu utiliser un argument de dimension. En effet, il est clair que $\dim(\mathrm{Vect}(v_1,v_2)) = 2$ et on montre facilement que $\dim(\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)) = 2$ (en remarquant que $u_3 = 2u_1 + 3u_2$ par exemple). Ainsi, après avoir montré la première inclusion, on aurait pu conclure directement à l'égalité des deux sous espaces vectoriels par égalité des dimensions.

(b) On a montré à la question précédente que $v_1 = (1,1,0,0) = u_1+u_2$ et donc $v_1 \in \mathrm{Vect}(u_1,u_2)$. Il reste alors à montrer que $v_1 \in \mathrm{Vect}(u_2,u_3,u_4)$ pour prouver que l'affirmation est vraie. On cherche donc $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ tels que

$$\alpha u_2+\beta u_3+\gamma u_4=v_1 \iff \begin{cases}\alpha+3\beta=1\\ 2\beta=1\\ 2\alpha+2\beta+\gamma=0\\ -\alpha-\beta=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\beta=\frac{1}{2}\\ \alpha=1-3\beta\\ \gamma=-2\alpha-2\beta\\ \alpha=-\beta\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\beta=\frac{1}{2}\\ \alpha=-\frac{1}{2}\\ \gamma=0\\ \alpha=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

Ainsi, on a $v_1=-\frac{1}{2}u_2+\frac{1}{2}u_3+0u_3$ et en particulier, $v_1\in \mathrm{Vect}(u_2,u_3,u_4)$.
On a donc montré que $v_1=(1,1,0,0)\in \mathrm{Vect}(u_1,u_2)\cap \mathrm{Vect}(u_2,u_3,u_4)$ et l'affirmation est donc $\boxed{\textbf{VRAIE}}$.

(c) Cette affirmation est $\boxed{\textbf{FAUSSE}}$.
Pour le montrer, on va vérifier que $(0,0,0,1)\notin \mathrm{Vect}(u_{1,2})+\mathrm{Vect}(u_2,u_3,u_4)=\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4)$. On a

$$\alpha u_1+\beta u_2+\gamma u_3+\delta u_4=(0,0,0,1) \iff \begin{cases}\beta+3\gamma=0\\ \alpha+2\gamma=0\\ -2\alpha+2\beta+2\gamma+\delta=0\\ \alpha-\beta-\gamma=1\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\beta=-3\gamma\\ \alpha=-2\gamma\\ -2\alpha+2\beta+2\gamma+\delta=0\\ \alpha-\beta-\gamma=1\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\beta=-3\gamma\\ \alpha=-2\gamma\\ -2\alpha+2\beta+2\gamma+\delta=0\\ 0=1\end{cases}$$

Ce système n'ayant pas de solution, on a donc montré que $(0,0,0,1)\notin \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4)$ et en particulier $\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4)\neq \mathbf{R}^4$.

Correction de l'Exercice 14.

On rappelle que $\mathrm{Vect}(u_1,...,u_p)$ est très exactement l'espace vectoriel composé de l'ensemble des combinaisons linéaires de $u_1,...,u_p$. Ainsi, un vecteur v est dans $\mathrm{Vect}(u_1,...,u_p)$ ssi il existe des réels $\lambda_1,...,\lambda_p$ tels que $v=\lambda_1u_1+...+\lambda_pu_p$.

Pour simplifier les écritures, notons $u_1=(2,3,-1)$, $u_2=(1,-1,-2)$ et $v_1=(3,7,0)$, $v_2=(5,0,-7)$. On a ainsi $F=\mathrm{Vect}(u_1,u_2)$ et $G=\mathrm{Vect}(v_1,v_2)$. On remarque facilement que

$$2u_1-u_2=v_1 \qquad (1)$$
$$u_1+3u_2=v_2 \qquad (2)$$

Ainsi, $v_1,v_2\in F$ en tant que combinaisons linéaires de u_1 et de u_2. Mais comme F est un espace vectoriel, donc stable par combinaison linéaire, alors toute combinaison linéaire de v_1 et de v_2, c'est-à-dire tout vecteur de G, est dans F. On conclut que $G\subset F$.

Réciproquement, en faisant (2)+3(1) pour isoler u_1 et (1)-2(1) pour isoler u_2, on trouve que

$$u_1=\frac{3}{7}v_1+\frac{1}{7}v_2$$
$$u_2=\frac{2}{7}v_1-\frac{1}{7}v_2$$

Donc, en utilisant le même raisonnement que précédemment, $F\subset G$. Par double inclusion, on a finalement $F=G$.

Correction de l'Exercice 15.

Pour trouver une base d'un espace vectoriel E, on commence le plus souvent par trouver une famille génératrice de E. Par exemple, si $E=\mathrm{Vect}(u_1,...,u_p)$, alors on sait que la famille $(u_1,...,u_p)$ est génératrice de E ; sinon, on essaie d'écrire un vecteur quelconque de E comme combinaison linéaire d'autres vecteurs et on conclut que les vecteurs intervenant dans cette combinaison forment une famille génératrice de l'espace.

Une fois la famille génératrice obtenue, on vérifie si elle est libre. Si c'est le cas, alors c'est une base. Sinon, c'est qu'un des vecteurs qui la compose est combinaison linéaire des autres : on le retire, ce qui ne change en rien le caractère générateur de la famille, et on vérifie que la nouvelle famille obtenue est libre. On recommence ce procédé jusqu'à obtenir une famille libre et génératrice, donc une base, de E.

Dans la pratique, on utilisera souvent un argument de dimension (cf. partie suivante du TD) : en effet, si E est de dimension n, alors une famille libre de E avec n éléments ou une famille génératrice de E avec n éléments est une base.

(a) On a $F_1=\{(x,x,z)\mid x,z\in\mathbf{R}\}$. Donc :

$$\begin{aligned} u\in F_1 &\iff \exists\, x,z\in\mathbf{R} \text{ tels que } u=(x,x,z)\\ &\iff \exists\, x,z\in\mathbf{R} \text{ tels que } u=x(1,1,0)+z(0,0,1)\\ &\iff u\in \mathrm{Vect}(u_1,u_2)\end{aligned}$$

où $u_1 = (1,1,0)$ et $u_2 = (0,0,1)$. Ainsi, la famille $\{u_1, u_2\}$ est une famille génératrice de F_1. De plus, il est clair que u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires donc c'est une famille libre.

Ainsi, (u_1, u_2) est une base de F_1.

(b) On remarque que $(-3,-1) = -\frac{3}{2}(2,1) + \frac{1}{2}(0,1)$ et donc $F_2 = \text{Vect}((2,1),(0,1),(-3,-1)) = \text{Vect}((2,1),(0,1))$. Par définition, la famille $\{(2,1),(0,1)\}$ est donc une famille génératrice de F_2. De plus, il est clair que $(2,1)$ et $(0,1)$ ne sont pas colinéaires donc c'est une famille libre.

Ainsi $((2,1),(0,1))$ est une base de F_2.

(c) Soit $P \in \mathbf{R}[X]$, on a $\deg(P) \leq 2$ et donc $P = aX^2 + bX + c$ avec $a, b, c \in \mathbf{R}$. De plus, on a $P(0) = 0$ et donc $c = 0$. Ainsi $P = aX^2 + bX$ et on a montré que $\{X, X^2\}$ engendre F_3. Or cette famille est une sous-famille de la famille libre $\{1, X, X^2\}$ donc c'est une famille libre et finalement (X, X^2) est une base de F_3.

(d) Soit $M \in M_2(\mathbf{R})$, on a

$$\begin{aligned} M \in F_4 &\iff \exists a, b \in \mathbf{R},\ M = \begin{pmatrix} a & a+b \\ 0 & 2a \end{pmatrix} \\ &\iff \exists a, b \in \mathbf{R},\ M = a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \exists a, b \in \mathbf{R},\ M = aM_1 + bM_2 \end{aligned}$$

où $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, la famille $\{M_1, M_2\}$ est une famille génératrice de F_4. Il est de plus clair que c'est une famille libre donc $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est une base de F_4.

Correction de l'Exercice 16.

(a) On considère les vecteurs $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (-2,1,0)$ et $v_3 = (1,-3,1)$ de $\mathbf{R}^3$.

(i) On veut montrer que $\mathcal{D} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$. On doit montrer que c'est une famille libre et génératrice dans $\mathbf{R}^3$.

- Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbf{R}$ tels que $\lambda v_1 + \mu v_2 + \nu v_3 = 0$, on a alors

$$\begin{cases} \lambda - 2\mu + \nu = 0 \\ \mu - 3\nu = 0 \\ \nu = 0 \end{cases} \iff \lambda = \mu = \nu = 0$$

Ainsi, la famille (v_1, v_2, v_3) est libre.

- Soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, on cherche $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda v_1 + \mu v_2 + \nu v_3 = (x, y, z)$. On cherche alors des solutions au système $\begin{cases} \lambda - 2\mu + \nu = x \\ \mu - 3\nu = y \\ \nu = z \end{cases}$ d'inconnues (λ, μ, ν).

$$\begin{cases} \lambda - 2\mu + \nu = x \\ \mu - 3\nu = y \\ \nu = z \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = x + 2\mu - \nu \\ \mu = y + 3\nu \\ \nu = z \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = x + 2y + 5z \\ \mu = y + 3z \\ \nu = z \end{cases}$$

Le système admet une solution et on a donc $(x, y, z) = (x+2y+5z)v_1 + (y+3z)v_2 + zv_3$ donc (v_1, v_2, v_3) est une famille génératrice de $\mathbf{R}^3$.

Finalement, $\mathcal{D}$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

(ii) En utilisant les calculs de la question précédente, on obtient que les coordonnées de w_1 dans la base $\mathcal{D}$ sont données par $(-1,-2,1)$ et celles de w_2 sont données par $(5,3,1)$.

(b) On considère les polynômes $P_0 = 1$, $P_1 = X+1$, $P_2 = (X+1)^2$ et $P_3 = (X+1)^3$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.

(i) On veut montrer que la famille $\mathcal{E} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. La famille $\mathcal{E}$ est échelonnée en degré ($\deg(P_i) = i$) et est donc libre. De plus, on a $\text{Card}(\mathcal{E}) = 4 = 3 + 1 = \dim \mathbb{R}_3[X]$ donc la famille $\mathcal{E}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

(ii)
- On cherche des réels a, b, c, d tels que $P = X^2 = aP_0 + bP_1 + cP_2 + dP_3$. En développant les expressions de P_2 et P_3, on obtient

$$X^2 = dX^3 + (3d+c)X^2 + (3d+2c+b)X + (a+b+c+d)$$

ce qui amène à résoudre le système suivant

$$\begin{cases} d = 0 \\ 3d + c = 1 \\ 3d + 2c + b = 0 \\ a + b + c + d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} d = 0 \\ c = 1 \\ b = -2c = -2 \\ a = -b - c - d = c = 1 \end{cases}$$

Finalement, $P = X^2 = P_0 - 2P_1 + P_2$ donc les coordonnées de P dans la base $\mathcal{E}$ sont données par $(1,-2,1,0)$.

- On cherche des réels a, b, c, d tels que $Q = 1 + X + X^2 + X^3 = aP_0 + bP_1 + cP_2 + dP_3$. En développant les expressions de P_2 et P_3, on obtient

$$X^3 + X^2 + X + 1 = dX^3 + (3d+c)X^2 + (3d+2c+b)X + (a+b+c+d)$$

ce qui amène à résoudre le système suivant

$$\begin{cases} d = 1 \\ 3d + c = 1 \\ 3d + 2c + b = 1 \\ a + b + c + d = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} d = 1 \\ c = 1 - 3d = -2 \\ b = 1 - 2c - 3d = 2 \\ a = 1 - b - c - d = 0 \end{cases}$$

Finalement, $Q = 1+X+X^2+X^3 = 2P_1-2P_2+P_3$ donc les coordonnées de P dans la base $\mathcal{E}$ sont données par $(0, 2, -2, 1)$.

Dimension des espaces vectoriels

Correction de l'Exercice 17.

(a) **(i)** Notons $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 3)$ et $u_3 = (1, 0, -1)$ de telle sorte que $F_1 = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$. On remarque aisément que $u_2 = 2u_1 - u_3$ donc $F_1 = \mathrm{Vect}(u_1, u_3)$.

Par définition du Vect, la famille $\{u_1, u_3\}$ est génératrice de F_1. Vérifions si elle est libre :

$$\alpha u_1 + \beta u_3 = 0 \iff \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = \gamma = 0$$

La famille est effectivement libre et génératrice, donc (u_1, u_3) est une base de F_1 et $\dim F_1 = 2$.

(ii) Notons $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (1, 2, 0, 0)$, $u_3 = (1, 2, 3, 0)$ et $u_4 = (1, 2, 3, 4)$ de telle sorte que $F_2 = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$. Par définition du Vect, la famille $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ est génératrice de F_2. Vérifions si elle est libre *- en fait, cela se remarque facilement car il s'agit d'une famille échelonnée, qui aboutit donc à une système échelonné quand on vérifie si elle est libre* :

$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 + \mu u_4 = 0 \iff \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \mu = 0 \\ 2\beta + 2\gamma + 2\mu = 0 \\ 3\gamma + 3\mu = 0 \\ 4\mu = 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = \gamma = \mu = 0$$

La famille est effectivement libre et génératrice, donc (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de F_2 et $\dim F_2 = 4$. *Il y a encore plus astucieux : on remarque qu'en tant que sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$, F_2 est de dimension inférieure ou égale à 4. Or, la famille de 4 vecteurs $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ est libre, donc F_2 est de dimension supérieure ou égale à 4. En conclusion, $\dim F_2 = 4$. En fait, on a même $F_2 = \mathbf{R}^4$ (inclusion et même dimension finie).*

Rappel de cours *(conséquence du théorème de la base incomplète) : dans un espace vectoriel E, si on trouve une famille libre avec p éléments, alors $\dim E \geq p$.*

(iii) Commençons par trouver une famille génératrice de F_3. On écrit ce que signifie pour un vecteur d'appartenir à cet espace :

$$(x, y, z, t) \in F_3 \iff \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ y + 2z + 3t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = z \cdot 1 + t \cdot 2 \\ y = z \cdot -2 + t \cdot -3 \\ z = z \cdot 1 + t \cdot 0 \\ t = z \cdot 0 + t \cdot 1 \end{cases} \iff (x, y, z, t) = z \cdot (1, -2, 1, 0) + t \cdot (2, -3, 0, 1)$$

Donc, en notant $u_1 = (1, -2, 1, 0)$ et $u_2 = (2, -3, 0, 1)$, on a que la famille $\{u_1, u_2\}$ est génératrice de F_3. Or, les vecteurs u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, donc cette famille est également libre. En conclusion, (u_1, u_2) est une base de F_3 et $\dim F_3 = 2$.

(iv) Notons $u_1 = (1, 0, 2, -1)$, $u_2 = (0, 1, 3, 2)$, $u_3 = (1, -1, -1, -3)$ et $u_4 = (1, 2, 8, 3)$ de telle sorte que $F_4 = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$. On remarque que $u_4 = 2u_1 + u_2 - u_3$, de sorte que $F_4 = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$. De plus, $u_3 = u_1 - u_2$ donc $F_4 = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$.

Par définition du Vect, la famille $\{u_1, u_2\}$ est génératrice de F_4. Elle est bien libre puisque les deux vecteurs qui la composent ne sont pas colinéaires. Donc (u_1, u_2) est une base de F_4 et $\dim F_4 = 2$.

(b) Soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, on a $(x, y, z) \in F_1 = \mathrm{Vect}(u_1, u_3)$ si et seulement si il existe $\alpha,\ \beta \in \mathbf{R}$ tels que $(x, y, z) = \alpha u_1 + \beta u_3$. Autrement dit

$$(x, y, z) \in F_1 \iff \exists \alpha,\ \beta \in \mathbf{R}, \begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \alpha = y \\ \alpha - \beta = z \end{cases}$$

$$\iff \exists \alpha,\ \beta \in \mathbf{R}, \begin{cases} \alpha + \beta = x \\ -\beta = y - x \\ -2\beta = z - x \end{cases}$$

$$\iff \exists \alpha,\ \beta \in \mathbf{R}, \begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \beta = x - y \\ \beta = \frac{x-z}{2} \end{cases}$$

$$\iff \exists \alpha,\ \beta \in \mathbf{R}, \begin{cases} \alpha = y \\ \beta = x - y \\ x - y = \frac{x-z}{2} \end{cases}$$

$$\iff \exists \alpha,\ \beta \in \mathbf{R}, \begin{cases} \alpha = y \\ \beta = x - y \\ 0 = -x + 2y - z \end{cases}$$

Or le système $\begin{cases} \alpha = y \\ \beta = x - y \\ 0 = -x + 2y - z \end{cases}$ admet une (unique) solution (α, β) si et seulement si $x - 2y + z = 0$ donc $(x, y, z) \in F_1 \iff x - 2y + z$ et on a donc montré que

$$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}.$$

(c) Soit $(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$, on a $(x, y, z, t) \in F_4 = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ si et seulement si il existe $\alpha,\ \beta \in \mathbf{R}$ tels que $(x, y, z, t) = \alpha u_1 + \beta u_2$. Autrement dit

$$\begin{aligned}
(x, y, z, t) \in F_4 &\iff \exists \alpha,\ \beta \in \mathbf{R}, \begin{cases} \alpha = x \\ \beta = y \\ 2\alpha + 3\beta = z \\ -\alpha + 2\beta = t \end{cases} \\
&\iff \exists \alpha,\ \beta \in \mathbf{R}, \begin{cases} \alpha = x \\ \beta = y \\ 3\beta = z - 2x \\ 2\beta = t + x \end{cases} \\
&\iff \exists \alpha,\ \beta \in \mathbf{R}, \begin{cases} \alpha = x \\ \beta = y \\ 3y = z - 2x \\ 2y = t + x \end{cases} \\
&\iff \exists \alpha,\ \beta \in \mathbf{R}, \begin{cases} \alpha = x \\ \beta = y \\ 2x + 3y - z = 0 \\ x + t - 2y = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Or le système $\begin{cases} \alpha = x \\ \beta = y \\ 2x + 3y - z = 0 \\ x + t - 2y = 0 \end{cases}$ admet une (unique) solution (α, β) si et seulement si $2x+3y-z = 0$ et $x+t-2y = 0$ donc $(x, y, z, t) \in F_4 \iff 2x+3y-z = 0$ et $x + t - 2y = 0$ et on a donc montré que

$$F_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid 2x + 3y - z = 0 \text{ et } x + t - 2y = 0\}.$$

Correction de l'Exercice 18.

(a)

- Au vu de la définition, il est clair que G est engendré par le vecteur $(2, -1, 0, 1)$ qui est donc une base de G et $\dim(G) = 1$.
- Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$, on a $u \in F \iff x + y = 0 = z + t$

$$\begin{aligned} &\iff u = (x, -x, z, -z) \\ &\iff u = x(1, -1, 0, 0) + z(0, 0, 1, -1) \end{aligned}$$

  Il est donc clair que F est engendré par $\{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1)\}$. De plus, ces deux vecteurs sont clairement non colinéaires donc la famille $\{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1)\}$ est libre et $((1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1))$ est une base de F. Ainsi, on a montré que $\dim(F) = 2$.
- On a $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 1 = 3 < 4 = \dim(\mathbf{R}^4)$ donc les sous-espaces vectoriels F et G ne sont pas supplémentaires dans $\mathbf{R}^4$.

(b)

- Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$, on a

$$\begin{aligned}
u \in F \iff \begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ 2z + t = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ t = -2z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ t = -2z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = y - 3z \\ t = -2z \end{cases} \\
&\iff u = (y - 3z, y, z, -2z) \\
&\iff u = y(1, 1, 0, 0) + z(-3, 0, 1, -2)
\end{aligned}$$

  Il est donc clair que F est engendré par $\{(1, 1, 0, 0), (-3, 0, 1, -2)\}$. De plus, ces deux vecteurs sont clairement non colinéaires donc la famille $\{(1, 1, 0, 0), (-3, 0, 1, -2)\}$ est libre et $((1, 1, 0, 0), (-3, 0, 1, -2))$ est une base de F. Ainsi, on a montré que $\dim(F) = 2$.
- Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$, on a

$$\begin{aligned}
u \in G \iff \begin{cases} y - z = 0 \\ y + z + t = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} z = y \\ t = -2y \end{cases} \\
&\iff u = (x, y, y, -2y) \\
&\iff u = x(1, 0, 0, 0) + y(0, 1, 1, -2)
\end{aligned}$$

  Le sous-espace vectoriel G est donc engendré par $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, -2)\}$. De plus, ces deux vecteurs sont clairement non colinéaires donc la famille $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, -2)\}$ est libre et $((1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, -2))$ est une base de G. Ainsi, on a montré que $\dim(G) = 2$.
- On a donc $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 2 = 4 = \dim(\mathbf{R}^4)$. Ainsi F et G sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^4$ si et seulement si $F \cap G = \{0_{\mathbf{R}^4}\}$. Pour $(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$ on a

$$(x,y,z,t)\in F\cap G \iff \begin{cases} x-y+z-t=0\\ 2z+t=0\\ y-z=0\\ y+z+t=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x-y+z-t=0\\ t=-2z\\ y=z\\ y+z+t=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=-2z\\ t=-2z\\ y=z\end{cases}$$

On observe que ce système a des solutions non triviales et donc $F\cap G\neq\{0_{\mathbf{R}^4}\}$ (par exemple $(-2,1,-2,1)\in F\cap G$). Ainsi, les sous-espaces vectoriels F et G ne sont pas supplémentaires dans $\mathbf{R}^4$.

(c)

- Soit $u=(x,y,z,t)\in\mathbf{R}^4$, on a

$$u\in F \iff \begin{cases} x+y=0\\ x-z+t=0\end{cases} \iff \begin{cases} y=-x\\ t=z-x\end{cases}$$
$$\iff u=(x,-x,z,z-x)$$
$$\iff u=x(1,-1,0,-1)+z(0,0,1,1)$$

Il est donc clair que F est engendré par $\{(1,-1,0,-1),(0,0,1,1)\}$. De plus, ces deux vecteurs sont clairement non colinéaires donc la famille $\{(1,-1,0,-1),(0,0,1,1)\}$ est libre et $((1,-1,0,-1),(0,0,1,1))$ est une base de F. Ainsi, on a montré que $\dim(F)=2$.

- Soit $u=(x,y,z,t)\in\mathbf{R}^4$, on a

$$u\in G \iff \begin{cases} 2x-z=0\\ 2x+y+t=0\end{cases} \iff \begin{cases} z=2x\\ t=-2x-y\end{cases}$$
$$\iff u=(x,y,2x,-2x-y)$$
$$\iff u=x(1,0,2,-2)+y(0,1,0,-1)$$

La famille $\{(1,0,2,-2),(0,1,0,-1)\}$ est donc une famille génératrice de G. C'est de plus une famille libre et donc $((1,0,2,-2),(0,1,0,-1))$ est une base de G et $\dim(G)=2$.

- On a $\dim(F)+\dim(G)=2+2=4=\dim(\mathbf{R}^4)$ et donc F et G sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^4$ si et seulement si $F\cap G=\{0_{\mathbf{R}^4}\}$. Pour $(x,y,z,t)\in\mathbf{R}^4$ on a

$$(x,y,z,t)\in F\cap G \iff \begin{cases} x+y=0\\ x-z+t=0\\ 2x-z=0\\ 2x+y+t=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y=0\\ -y-z+t=0\\ -2y-z=0\\ -y+t=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y=0\\ z=0\\ -2y-z=0\\ -y+t=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y=0\\ z=0\\ y=0\\ -y+t=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=0\\ z=0\\ y=0\\ t=0\end{cases}$$

On a donc $F\cap G=\{0_{\mathbf{R}^4}\}$ et donc F et G sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^4$.

Correction de l'Exercice 19.

(a) Soit $t\in\mathbf{R}$, la famille $((1,t),(t,3))$ est une base de $\mathbf{R}^2$ si et seulement si elle est libre. Ainsi, ce n'est pas une base de $\mathbf{R}^2$ si et seulement si le système ci-dessous admet une solution non nulle :

$$\begin{cases} a+bt=0\\ at+3b=0\end{cases} \iff \begin{cases} a+bt=0\\ b(3-t^2)=0\end{cases}$$

ainsi, le système n'admet pas de solution non nulle si et seulement si $t^2\neq 3$, et donc $((1,t),(t,3))$ est une base de $\mathbf{R}^2$ si et seulement si $t\notin\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$.

(b) Soit $t\in\mathbf{R}$, la famille $((1,0,t),(1,1,t),(t,0,1))$ est une base de $\mathbf{R}^2$ si et seulement si elle est libre. On s'intéresse donc au système linéaire suivant :

$$\begin{cases} a+b+ct=0 \\ b=0 \\ at+bt+c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} b=0 \\ a+ct=0 \\ at+c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} b=0 \\ a=-ct \\ c=-at=ct^2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} b=0 \\ a=-ct \\ c(1-t^2)=0 \end{cases}$$

Ce système admet des solutions non triviales si et seulement si $1-t^2=0$, ainsi $((1,0,t),(1,1,t),(t,0,1))$ est une base si et seulement si $t \notin \{-1,1\}$.

Correction de l'Exercice 20.

(a) Commençons par trouver une famille génératrice de F :

$$(x,y,z,t) \in F \iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y+z-t=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=z\cdot 0+t\cdot 1 \\ y=z\cdot -1+t\cdot -1 \\ z=z\cdot 1+t\cdot 0 \\ t=z\cdot 0+t\cdot 1 \end{cases}$$
$$\iff (x,y,z,t)=z\cdot(0,-1,1,0)+t\cdot(1,-1,0,1)$$

Ainsi, la famille $((0,-1,1,0),(1,-1,0,1))$ est génératrice de F. De plus, comme les deux vecteurs qui la composent ne sont pas colinéaires, elle est libre. Donc c'est une base de F et $\dim F=2$. Enfin, puisque les deux premiers vecteurs générateurs de G ne sont pas colinéaires, on a $\dim G \geq 2$

(b) Notons $G=\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)$. On vérifie directement que $u_1,u_2,u_3 \in F$ puisque chacun de ces trois vecteurs vérifient les deux équations caractérisant F. Ainsi, puisque F est un espace vectoriel, donc stable par combinaison linéaire, toute combinaison linéaires de u_1,u_2,u_3, c'est à dire tout vecteur de G, est dans F. En conclusion, $G\subset F$. On en déduit alors que $\dim G \leq \dim E=2$. Mais comme $\dim G\geq 2$, on a finalement $\dim G=2$. Ceci finit de montrer que $G=F$.

(c) La famille $\{u_1,u_2\}$ est libre et de cardinal 2 dans un espace G de dimension 2, donc (u_1,u_2) une base de $G=F$. Le théorème de la base incomplète assure que l'on peut compléter cette famille libre de $\mathbf{R}^4$ en une base de $\mathbf{R}^4$. Par exemple, avec les vecteurs de la base canonique e_3 et e_1 :

$$\alpha u_1+\beta u_2+\gamma e_3+\lambda e_1=0 \iff \begin{cases} \alpha+\beta+0\gamma+\lambda=0 \\ -2\alpha+2\beta+0\gamma+0\lambda=0 \\ \alpha-3\beta+\gamma+0\lambda=0 \\ \alpha+\beta+0\gamma+0\lambda=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha+\beta+0\gamma+\lambda=0 \\ 4\beta+0\gamma+2\lambda=0 \\ -4\beta+\gamma-\lambda=0 \\ -\lambda=0 \end{cases} \iff \alpha=\beta=\gamma=\lambda=0$$

Ainsi, d'après le cours, $\mathrm{Vect}(e_3,e_1)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbf{R}^4$.

Correction de l'Exercice 21.

(a) On commence par trouver une famille génératrice de F :

$$(a,b,c,d)\in F \iff (a,b,c,d)=a\cdot(1,0,0,0)+b\cdot(0,1,0,-1)+c\cdot(0,0,1,2)$$

Ainsi, les vecteurs $u_1=(1,0,0,0)$, $u_2=(0,1,0,-1)$ et $u_3=(0,0,1,2)$ sont générateurs de F. On vérifie aussi facilement que la famille $\{u_1,u_2,u_3\}$ est libre. Donc (u_1,u_2,u_3) est une base de F et $\dim F=3$. On peut compléter cette base avec le vecteur e_4 pour obtenir une base (famille libre avec $4=\dim \mathbf{R}^4$ vecteurs) (u_1,u_2,u_3,e_4) de $\mathbf{R}^4$.

(b)
— On commence par trouver une famille génératrice de G :

$$(a,b,c,d)\in G \iff \begin{cases} a=d \\ b=2c \end{cases} \iff \begin{cases} a=c\cdot 0+d\cdot 1 \\ b=c\cdot 2+d\cdot 0 \\ c=c\cdot 1+d\cdot 0 \\ d=c\cdot 0+d\cdot 1 \end{cases}$$
$$\iff (a,b,c,d)=z\cdot(0,2,1,0)+t\cdot(1,0,0,1)$$

Ainsi, les vecteurs $v_1=(0,2,1,0)$ et $v_2=(1,0,0,1)$ sont générateurs de G. On vérifie aussi facilement que la famille $\{v_1,v_2\}$ est libre. Donc (v_1,v_2) est une base de G et $\dim G=2$. On peut compléter cette base avec les vecteurs e_3 et e_4 pour obtenir une base (v_1,v_2,e_3,e_4) de $\mathbf{R}^4$.

— On commence par trouver une famille génératrice de $F\cap G$:

$$(a,b,c,d)\in F\cap G \iff \begin{cases} b-2c+d=0 \\ a=d \\ b=2c \end{cases} \iff \begin{cases} a=c\cdot 0 \\ b=c\cdot 2 \\ c=c\cdot 1 \\ d=c\cdot 0 \end{cases}$$
$$\iff (a,b,c,d)=c\cdot(0,2,1,0)$$

Ainsi, le vecteurs $w=(0,2,1,0)$est générateur de $F\cap G$. De plus, la famille $\{w\}$ est clairement libre. Donc (w) est une base de $F\cap G$ et $\dim F\cap G=1$. On peut compléter cette base avec les vecteurs e_1, e_2 et e_4 pour obtenir une base (w,e_1,e_2,e_4) de $\mathbf{R}^4$.

Correction de l'Exercice 22.

(a) Les vecteurs u_1 et u_2 sont non-colinéaires et forment donc une famille libre dans $\mathbf{R}^4$. D'après le théorème de la base incomplète, on peut alors compléter $\{u_1,u_2\}$ en une base (u_1,u_2,v_1,v_2) de $\mathbf{R}^4$. On pose $v_1=(1,0,0,0)$ et $v_2=(0,1,0,0)$, la famille $\{u_1,u_2,v_1,v_2\}$ est une famille à quatre éléments de $\mathbf{R}^4$, il suffit donc de montrer qu'elle est libre pour conclure que c'est une base de $\mathbf{R}^4$. Pour $a,b,c,d \in \mathbf{R}$, on a

$$au_1+bu_2+cv_1+dv_2=0 \iff \begin{cases} 2a+b+c=0 \\ a+b+d=0 \\ -b=0 \\ a+b=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2a+c=0 \\ a+d=0 \\ b=0 \\ a=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c=0 \\ d=0 \\ b=0 \\ a=0 \end{cases}$$

Ainsi, la famille $\{u_1,u_2,v_1,v_2\}$ est libre et (u_1,u_2,v_1,v_2) est une base de $\mathbf{R}^4$.

(b)
- Par définition, $\{u_1,u_2\}$ est une famille génératrice de F. De plus, on a montré à la question précédente que c'est une famille libre, ainsi (u_1,u_2) est une base de F et $\dim(F)=2$.
- Par définition, $\{u_1,u_2,v_1\}$ est une famille génératrice de H_1 et c'est une famille libre en tant que sous-famille de la famille libre $\{u_1,u_2,v_1,v_2\}$. Ainsi (u_1,u_2,v_1) est une base de H_1 et donc $\dim(H_1)=3$.
- De même que pour H_1, on montre que (u_1,u_2,v_2) est une base de H_2 et donc $\dim(H_2)=3$.
- Enfin, on a $H_1+H_2=\mathrm{Vect}(u_1,u_2,v_1,v_2)=\mathbf{R}^4$ et donc $\dim(H_1+H_2)=4$.

(c) Au vu des définitions de F,H_1 et H_2, il est clair que $F\subset H_1$ et $F\subset H_2$. Ainsi, on a $F\subset H_1\cap H_2$.
D'après la formule de Grassmann, on a $\dim(H_1\cap H_2)=\dim(H_1)+\dim(H_2)-\dim(H_1+H_2)=3+3-4=2$. Ainsi, on a $\sim(H_1\cap H_2)=\dim(F)$ et finalement $F=H_1\cap H_2$.

(d)
- On cherche des réels $a,b,c,d\in\mathbf{R}$ tels que
$$u=(x,y,z,t)\in H_1 \iff ax+by+cz+dt=0.$$
En particulier, cette équation doit être vérifiée par les vecteurs u_1,u_2 et v_1, on a donc
$$\begin{cases} 2a+b+d=0 \\ b-c+d=0 \\ a=0 \end{cases} \iff \begin{cases} b+d=0 \\ b-c+d=0 \\ a=0 \end{cases} \iff \begin{cases} d=-b \\ c=0 \\ a=0 \end{cases}$$
ainsi, on a $a=c=0$ et on peut poser $b=1$ et $d=-1$. On obtient donc
$$H_1=\{(x,y,z,t)\in\mathbf{R}^4 \mid y-t=0\}.$$
- De même, on montre que
$$H_2=\{(x,y,z,t)\in\mathbf{R}^4 \mid x-2z-2t=0\}.$$
- Enfin, on en déduit que
$$F=H_1\cap H_2=\{(x,y,z,t)\in\mathbf{R}^4 \mid x-2z-2t=0=y-t\}$$

(e) Par définition, on a $F+G=\mathrm{Vect}(u_1,u_2,v_1,v_2)=\mathbf{R}^4$ et $\dim(F\cap G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)=0$ donc $F\cap G=\{0_{\mathbf{R}^4}\}$. Ainsi, on a montré que $\mathbf{R}^4=F\oplus G$.

Soit $u=(a,b,c,d)\in\mathbf{R}^4$, on a montré que F et G sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^4$ donc il existe un unique couple $(v,w)\in F\times G$ tels que $u=v+w$. Par définition de F et G, il existe $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbf{R}$ tels que $v=\alpha u_1+\beta u_2=(2\alpha,\alpha+\beta,-\beta,\alpha+\beta)$ et $w=\gamma v_1+\delta v_2=(\gamma,\delta,0,0)$. Ainsi

$$\begin{cases} 2\alpha+\gamma=a \\ \alpha+\beta+\delta=b \\ -\beta=c \\ \alpha+\beta=d \end{cases} \iff \begin{cases} \beta=-c \\ \alpha=c+d \\ \delta=b-d \\ \gamma=a-2c-2d \end{cases}$$

Finalement $u=v+w$ avec $v=(2c+2d,d,c,d)\in F$ et $w=(a-2c-2d,b-d,0,0)\in G$.

Correction de l'Exercice 23.

(a) On remarque immédiatement que $v_3=3v_1-v_2$. Donc, puisque v_3 est combinaison linéaire de v_1 et de v_2, $F=\mathrm{Vect}(v_1,v_2,v_3)=\mathrm{Vect}(v_1,v_2)$. La famille $\{v_1,v_2\}$ est par définition génératrice de F. Puisque les <u>deux</u> vecteurs qui la composent ne sont pas colinéaires, elle est libre. Donc (v_1,v_2) est une base de F et les coordonnées de v_3 dans la base cette base sont $(3;-1)$.

(b) De la même façon, $w_3=5w_1-2w_2$. Donc, puisque w_3 est combinaison linéaire de w_1 et de w_2, $G=\mathrm{Vect}(w_1,w_2,w_3)=\mathrm{Vect}(w_1,w_2)$. La famille $\{w_1,w_2\}$ est par définition génératrice de G. Puisque les <u>deux</u> vecteurs qui la composent ne sont pas colinéaires, elle est libre. Donc (w_1,w_2) est une base de G et les coordonnées de w_3 dans cette base sont $(5;-2)$.

(c) On résout pour cela un système :

$$\alpha v_1+\beta v_2+\gamma w_1+\mu w_2=0 \iff \begin{cases}\alpha+2\beta+\gamma+2\mu=0\\ 3\alpha+7\beta+3\gamma+7\mu=0\\ -2\alpha-5\beta-3\mu=0\\ 2\alpha+6\beta+2\gamma+6\mu=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\alpha+2\beta+\gamma+2\mu=0\\ \beta+\mu=0\\ -\beta+2\gamma+\mu=0\\ 2\beta+2\mu=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\alpha+2\beta+\gamma+2\mu=0\\ \beta+\mu=0\\ 2\gamma+2\mu=0\\ 0=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\alpha=\mu\\ \beta=-\mu\\ \gamma=-\mu\end{cases}$$

En prenant par exemple $\mu=1$, on trouve que $v_1-v_2-w_1+w_2=0$. La famille $\{v_1,v_2,w_1,w_2\}$ est donc liée et w_2 peut s'exprimer comme combinaison linéaire de v_1,v_2,w_1.

Ainsi, $F+G=\mathrm{Vect}(v_1,v_2)+\mathrm{Vect}(w_1,w_2)=\mathrm{Vect}(v_1,v_2,w_1,w_2)=\mathrm{Vect}(v_1,v_2,w_1)$. La famille $\{v_1,v_2,w_1\}$ est par définition génératrice de $F+G$. On montre aussi qu'elle est libre :

$$\alpha v_1+\beta v_2+\gamma w_1=0 \iff \begin{cases}\alpha+2\beta+\gamma=0\\ 3\alpha+7\beta+3\gamma=0\\ -2\alpha-5\beta=0\\ 2\alpha+6\beta+2\gamma=0\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha+2\beta+\gamma=0\\ \beta=0\\ -\beta+2\gamma=0\\ 2\beta=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\end{cases}$$

Ainsi, (v_1,v_2,w_1) est une base de $F+G$.

(d) **(i)** Vérifions que $E\subset\mathbf{R}^4$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$:

— Le vecteur nul $(0,0,0,0)$ est bien dans E car $4\times0-2\times0+0=0$.

— Pour tous $(x,y,z,t),(x',y',z',t')\in E$ et $\lambda\in\mathbf{R}$. On a :

$$\lambda\cdot(x,y,z,t)+(x',y',z',t')=(\lambda x+x',\lambda y+y',\lambda z+z',\lambda t+t')$$

Est-ce que ce vecteur est dans E ? Oui, car

$$\begin{aligned}&4(\lambda x+x')-2(\lambda y+y')+(\lambda z+z')\\ &=\lambda\times(4x-2y+z)+(4x'-2y'+z')\\ &=\lambda\times0+0=0,\end{aligned}$$

l'avant-dernière égalité résultant du fait que (x,y,z,t) et (x',y',z',t') sont dans E.

— Conclusion : $E\subset\mathbf{R}^4$ contient le vecteur nul et est stable par somme et produit externe. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.

(ii) On commence par trouver une famille génératrice de E en exprimant ce que signifie pour un vecteur de $\mathbf{R}^4$ d'appartenir à cet espace :

$$(x,y,z,t)\in E \iff 4x-2y+t=0 \iff \begin{cases}x=x\cdot1+y\cdot0+z\cdot0\\ y=x\cdot0+y\cdot1+z\cdot0\\ z=x\cdot0+y\cdot0+z\cdot1\\ t=x\cdot-4+y\cdot2+z\cdot0\end{cases}$$

$$\iff (x,y,z,t)=x\cdot(1,0,0,-4)+y\cdot(0,1,0,2)+z\cdot(0,0,1,0)$$

La famille $((1,0,0,-4),(0,1,0,2),(0,0,1,0))$ est donc génératrice de E. Or, on montre aussi très facilement qu'elle est libre :

$$\alpha(1,0,0,-4)+\beta(0,1,0,2)+\gamma(0,0,1,0)=0 \iff \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\\ -4\alpha+2\beta=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\end{cases}$$

En conclusion, c'est une base de E.

(e) Des questions 3. et 4.(b), on tire immédiatement que $\dim E=3=\dim(F+G)$. Or, puisque $v_1,v_2,w_1\in E$, ces trois vecteurs vérifiant l'équation de E, alors $F+G=\mathrm{Vect}(v_1,v_2,w_1)\subset E$. On en déduit que $E=F+G$.

D'après la formule de Grassmann, $\dim F\cap G=\dim F+\dim G-\dim(F+G)=1$. Donc $F\cap G\neq\{0_{\mathbf{R}^4}\}$ et la somme n'est pas directe.

Correction de l'Exercice 24.

(a) On doit montrer que $F'\cap G=\{0_E\}$ et $F'+G=F+G$.

- Par hypothèse, F' et $F+G$ sont supplémentaires dans F donc en particulier, on a $F'\subset F$ et $F'\cap(F\cap G)=\{0_E\}$. On a donc

$$\{0_E\} = F' \cap (F \cap G) = F' \cap F \cap G = (F' \cap F) \cap G$$
$$= F' \cap G$$

Ainsi $F' \cap G = \{0_E\}$ et F' et G sont en somme directe.

- Soit $u \in F + G$. Par définition, il existe $u_F \in F$ et $u_G \in G$ tels que $u = u_F + u_G$. De plus, $u_F \in F' \oplus (F \cap G)$ donc il existe $u_{F'} \in F'$ et $\tilde{u} \in F \cap G$ tels que $u_F = u_{F'} + \tilde{u}$.
  Finalement, on a $u = u_F + u_G = u_{F'} + (\tilde{u} + u_G)$ or $u_G \in G$ et $\tilde{u} \in F \cap G$ donc $\tilde{u} + u_G \in G$. Ainsi, on a $u = u_{F'} + (\tilde{u} + u_G)$ avec $u_{F'} \in F'$ et $\tilde{u} + u_G \in G$ et on a donc montré que $F + G = F' + G$.

On a donc prouvé que $F' \oplus G = F + G$.

(b) En reprenant les notations de la question précédente, on a $F' \oplus G = F + G$ et donc $\dim(F+G) = \dim(F') + \dim(G)$. De plus, on a également $F = F' \oplus (F \cap G)$ et donc $\dim(F) = \dim(F') + \dim(F \cap G)$. On obtient alors

$$\dim(F+G) = \dim(F') + \dim(G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

(c) On suppose que $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$. D'après la question précédente, on a alors $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(\{0_E\}) = \dim(E)$. Ainsi $\dim(F+G) = \dim(E)$ et donc $E = F + G$. De plus, F et G étant en somme directe, on a bien $E = F \oplus G$.

Extraits d'examens d'années précédentes

Correction de l'Exercice 25.

(1) Vérifions d'abord que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$:

— $(0,0,0,0)$ est dans E car ce vecteur vérifie bien les deux équations caractérisant E.

— Soient (x,y,z,t), $(x',y',z',t') \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Il s'agit de vérifier que le vecteur $\lambda \cdot (x,y,z,t) + (x',y',z',t') = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z', \lambda t + t')$ est aussi dans E. Premièrement :

$$\begin{aligned}(\lambda x + x') + (\lambda y + y') &= \lambda \times (x+y) + (x'+y') \\ &= \lambda \times 0 + 0\end{aligned}$$

par hypothèse. Et de même,

$$\begin{aligned}(\lambda x + x') + (\lambda z + z') - (\lambda t + t') &= \lambda \times (x+z-t) + (x'+z'-t') \\ &= \lambda \times 0 + 0\end{aligned}$$

Ainsi, E est non vide et stable par produit externe et somme, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$. Commençons par trouver une famille génératrice :

$$(x,y,z,t) \in E \iff \begin{cases} x+y=0 \\ x+z-t=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = x \cdot 1 + z \cdot 0 \\ y = x \cdot -1 + z \cdot 0 \\ z = x \cdot 0 + z \cdot 1 \\ t = x \cdot 1 + z \cdot 1 \end{cases}$$
$$\iff (x,y,z,t) = z \cdot (1,-1,0,1) + t \cdot (0,0,1,1)$$

En notant $v_1 = (1,-1,0,1)$ et $v_2 = (0,0,1,1)$, on a donc que $\{v_1, v_2\}$ est une famille génératrice de E.

(2) De plus, les deux vecteurs qui composent la famille $\{v_1, v_2\}$ ne sont pas colinéaires, donc cette famille est libre. On conclut alors que (v_1, v_2) est une base de E et que $\dim E = 2$.

(3) Par définition du Vect, la famille $\{u_1, u_2\}$ est génératrice de F. De plus, elle est libre car les deux vecteurs u_1 et u_2 qui la composent ne sont pas colinéaires. Donc (u_1, u_2) est une base de F et $\dim F = 2$.

(4) Pour cela, on résout :

$$av_1 + bv_2 + cu_1 + du_2 = 0_{\mathbf{R}^4} \iff \begin{cases} a-c=0 \\ -a+d=0 \\ b+c=0 \\ a+b-c+d=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=d \\ b=-d \\ c=d \\ d=d \end{cases}$$

Le système admet donc une infinité de solutions. Par exemple, avec $d=1$, on trouve que $v_1 - v_2 + u_1 + u_2 = 0_{\mathbf{R}^4}$. Donc la famille n'est pas libre et, par exemple, u_2 est combinaison linéaire des trois autres vecteurs de cette famille.

(5) $E + F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2) + \mathrm{Vect}(u_1, u_2) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, u_1, u_2) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, u_1)$, le vecteur u_2 étant combinaison linéaire des trois autres d'après la question précédente. La famille $\{v_1, v_2, u_1\}$ est génératrice. On vérifie facilement qu'elle est libre :

$$av_1 + bv_2 + cu_1 = 0_{\mathbf{R}^4} \iff \begin{cases} a-c=0 \\ -a=0 \\ b+c=0 \\ a+b-c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$$

Donc (v_1, v_2, u_1) est une base de $E+F$ et $\dim(E+F) = 3$.

(6) **(a)** $u_1 + u_2 = (-1,1,1,0)$ vérifie les deux équations de E donc il est bien dans E. De plus, par définition de F, il est aussi dans F.

(b) Par la formule de Grassmann, $\dim(E+F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F)$ d'où on déduit que $\dim(E \cap F) = 2+2-3 = 1$. Or, le vecteur $u_1 + u_2 \in E \cap F$ avec $u_1 + u_2 \neq 0_{\mathbf{R}^4}$. Donc $(u_1 + u_2)$ est une base de cet espace.

(7) E et F ne sont pas en somme directe donc les deux espaces ne sont pas supplémentaires dans $\mathbf{R}^4$.

Correction de l'Exercice 26.

(1) **(a)** On remarque que $v_4 = v_1 - 2v_1 + 3v_3$ et donc par définition $v_4 \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_2)$ qui est l'ensemble des combinaisons linéaires de v_1, v_2 et v_3.

(b) On a $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ car $v_4 \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$. Ainsi $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une famille génératrice de F. Montrons que c'est une famille libre.

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = 0_{\mathbf{R}^4} \iff \begin{cases} a+b+c=0 \\ a+b+c=0 \\ b+c=0 \\ c=0 \end{cases}$$
$$\iff a=b=c=0$$

La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est donc libre. On a donc montré que (v_1, v_2, v_3) est une base de F et donc $\dim(F) = 3$.

(2) **(a)** Montrons que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.

- Il est clair que $0_{\mathbf{R}^4} = (0,0,0,0) \in G$ et donc $G \neq \emptyset$.
- Soient $u_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1) \in G$ et $u_2 = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in G$. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. On pose $u = u_1 + \lambda u_2 = (x, y, z, t)$.
  On a $y = y_1 + \lambda y_2 = 0$ car $u_1, u_2 \in G$ et donc $u \in G$.
  L'ensemble G est donc stable pour l'addition et la multiplication par un scalaire.

On a donc montré que G est un sous-espace vectoriel de $E = \mathbf{R}^4$.

(b) Déterminons une base de G. On commence par trouver une famille génératrice de G. Pour $(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4$, on a

$$(x,y,z,t) \in G \iff y = 0$$
$$\iff \begin{cases} x = x \cdot 1 + z \cdot 0 + t \cdot 0 \\ y = x \cdot 0 + z \cdot 0 + t \cdot 0 \\ z = x \cdot 0 + z \cdot 1 + t \cdot 0 \\ t = x \cdot 0 + z \cdot 0 + t \cdot 1 \end{cases}$$
$$\iff (x,y,z,t) = x \cdot (1,0,0,0) + z \cdot (0,0,1,0) + t \cdot (0,0,0,1)$$
$$\iff (x,y,z,t) = xe_1 + ze_3 + te_4$$

On a donc établi que la famille $\{e_1, e_3, e_4\}$ engendre G. De plus, cette famille étant libre, on a montré que (e_1, e_3, e_4) est une base de G et donc $\dim(G) = 3$.

(3) **(a)**
- Montrons que $e_1 \notin F$.

$$e_1 = av_1 + bv_2 + cv_3 \iff \begin{cases} a+b+c=1 \\ a+b+c=0 \\ b+c=0 \\ c=0 \end{cases}$$

Il est évident que le système linéaire ci-dessus n'admet pas de solution et donc que e_1 n'est pas combinaison linéaire de v_1, v_2 et v_3 donc $e_1 \notin F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$.

- On remarque que $e_3 = v_2 - v_1$ et $e_4 = v_3 - v_2$ et donc $e_3, e_4 \in F$. Or d'après la question précédente, on a $e_3, e_4 \in G$ et donc $e_3, e_4 \in F \cap G$.

(b) On a $F \cap G \subset G$ et $e_1 \notin F \cap G$ donc l'inclusion est stricte et $\dim(F) \leq \dim(G) - 1 = 2$. De plus, d'après la question précédente $\{e_3, e_4\}$ est une famille libre à deux éléments de $F \cap G$ donc $\dim(F \cap G) = 2$ et (e_3, e_4) est une base de $F \cap G$.

(c) On a montré que $\dim(F \cap G) = 2$, en particulier $F \cap G \neq \{0_{\mathbf{R}^4}\}$ et donc F et G ne sont pas supplémentaires dans E car pas en somme directe.

(4) D'après la formule de Grassmann, on a $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 3 + 3 - 2 = 4 = \dim(\mathbf{R}^4)$ et donc $F + G = \mathbf{R}^4$.

(5) On a montré que $e_1 \notin F$ et donc la famille $\{e_1, v_1, v_2, v_3\}$ est libre *(la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre et e_1 ne peut s'écrire comme combinaison linéaire de v_1, v_2 et v_3)* et constitue donc une base de $\mathbf{R}^4$. Ainsi, si on pose $H = \mathrm{Vect}(e_1)$, on obtient que F et H sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^4$.

Correction de l'Exercice 27.

(1) **(a)** Par définition, la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est génératrice de F. Nous allons prouver qu'elle est également libre :

$$a \cdot u_1 + b \cdot u_2 + c \cdot u_3 = 0_{\mathbb{R}^4} \iff \begin{cases} a - c = 0 \\ a + b = 0 \\ -a - b + 2c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a = c \\ b = c \\ a = -b = -c \\ -a - b + 2c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Cela montre que (u_1, u_2, u_3) est une base de F (qui est de dimension 3).

(b) D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter toute famille libre d'un espace vectoriel E en une base de cet espace en utilisant des vecteurs d'une famille génératrice de E.

Ici, il est donc possible de compléter la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$, qui est libre dans $\mathbb{R}^4$, en une base de $\mathbb{R}^4$ à l'aide par exemple de vecteurs de la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4).

(c) La famille $\{u_1, u_2, u_3, e_1\}$ contient $4 = \dim \mathbb{R}^4$ vecteurs. Montrons que c'est une famille libre :

$$au_1 + bu_2 + cu_3 + de_1 = 0_{\mathbb{R}^4} \iff \begin{cases} a - c + d = 0 \\ a + b = 0 \\ -a - b + 2c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a - c + d = 0 \\ b + c - d = 0 \\ -b + c + d = 0 \\ b - c = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a - c + d = 0 \\ b + c - d = 0 \\ 2c = 0 \\ -2c + d = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = c - d \\ b = d - c \\ c = 0 \\ d = 2c = 0 \end{cases} \iff a = b = c = d = 0.$$

Ainsi, (u_1, u_2, u_3, e_1) est une famille libre à 4 éléments de $\mathbb{R}^4$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^4$. Cela prouve que $\text{Vect}(e_1)$ est un supplémentaire de $F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ dans $\mathbb{R}^4$.

(2) On commence par trouver une famille génératrice de G :

$$(x, y, z, t) \in G \iff \begin{cases} x - y + t = 0 \\ y + z - 2t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = {\color{blue}-1} \times z + {\color{red}1} \times t \\ y = {\color{blue}-1} \times z + {\color{red}2} \times t \\ z = {\color{blue}1} \times z + {\color{red}0} \times t \\ t = {\color{blue}0} \times z + {\color{red}1} \times t \end{cases}$$

Ainsi, la famille $\{{\color{blue}v_1}, {\color{red}v_2}\}$, avec ${\color{blue}v_1 = (-1, -1, 1, 0)}$ et ${\color{red}v_2 = (1, 2, 0, 1)}$, est génératrice de G. De plus, elle est libre, les deux vecteurs qui la composent n'étant pas colinéaires. Par conséquent, (v_1, v_2) est une base de G (qui est de dimension 2).

(3) **(a)** Le vecteur u_1 vérifie les deux équations définissant G : $1 - 1 + 0 = 0$ et $1 - 1 - 2 \times 0 = 0$. Donc $u_1 \in G$.

D'après la formule de Grassmann, $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 4$.

Ainsi, $\dim(F + G) = 4 = \dim \mathbb{R}^4$ et $F + G \subset \mathbb{R}^4$, par définition. Donc $F + G = \mathbb{R}^4$.

(b) Le vecteur u_1 appartient à la fois à F et à G donc $F \cap G \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ et les deux sous-espaces F et G ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.