Applications linéaires

Exercice 1. Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Justifier.

♦ $\varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x \end{array}$

♦ $\varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

♦ $\varphi_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (y,x) \end{array}$

♦ $\varphi_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-2y, 0) \end{array}$

♦ $\varphi_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-2y, 1) \end{array}$

$\varphi_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y, x+y) \end{array}$

$\varphi_7 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1,\dots,x_n) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i \end{array}$

♦ $\varphi_8 : \begin{array}{ccc} M_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & ad-bc \end{array}$

♦ $\varphi_9 : \begin{array}{ccc} M_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$

$\varphi_{10} : \begin{array}{ccc} M_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & a+d \end{array}$

♦ $\varphi_{11} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \mapsto & (P(0), P(1)) \end{array}$

♦ $\varphi_{12} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X^2) \end{array}$

$\varphi_{13} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X) - XP'(X) \end{array}$

$\varphi_{14} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ P(X) & \mapsto & (x \mapsto P(x)) \end{array}$

$\varphi_{15} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ u & \mapsto & (u_2, u_5, u_3+u_6) \end{array}$

$\varphi_{16} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_n u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$

$\varphi_{17} : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & (x \mapsto 7f(x)+x) \end{array}$

$\varphi_{18} : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{array}$

$\varphi_{19} : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f \circ \sin \end{array}$

$\varphi_{20} : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \sin \circ f \end{array}$

Exercice 2.

(1) ♦ Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$\varphi(x,y) = (x+y, x-y, x+y).$$

(a) Justifier que φ est linéaire. Déterminer le noyau de φ et son image.

(b) L'application φ est-elle injective ? surjective ?

(2) Mêmes questions avec l'application $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\psi(x,y,z) = (2x+y+z, y-z, x+y).$$

Exercice 3. ♦ Soient E, F deux espaces vectoriels avec $E \neq \{0_E\}$ et $F \neq \{0_F\}$, soient $u_1, \dots, u_p$ des vecteurs de E et soit $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$.
Dire, en justifiant, si les assertions **(1)** à **(4)** suivantes sont vraies ou fausses
(a) si φ est quelconque ; **(b)** si φ est injective ; **(c)** si φ est surjective.

(1) Si la famille $\{u_1, \dots, u_p\}$ est libre, alors la famille $\big\{\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_p)\big\}$ est libre.

(2) Si la famille $\big\{\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_p)\big\}$ est libre, alors la famille $\{u_1, \dots, u_p\}$ est libre.

(3) Si la famille $\{u_1, \dots, u_p\}$ engendre E, alors la famille $\big\{\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_p)\big\}$ engendre F.

(4) Si la famille $\big\{\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_p)\big\}$ engendre F, alors la famille $\{u_1, \dots, u_p\}$ engendre E.

Exercice 4. Soient E, F, G trois espaces vectoriels, $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\psi \in \mathcal{L}(F,G)$.

(1) Montrer que $\psi \circ \varphi = 0_{\mathcal{L}(E,G)}$ si, et seulement si, $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(\psi)$.

(2) Montrer que $\varphi\big(\mathrm{Ker}(\psi \circ \varphi)\big) = \mathrm{Ker}(\psi) \cap \mathrm{Im}(\varphi)$.

Exercice 5. Soient E un espace vectoriel et $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire.
Montrer que φ est surjective si, et seulement si, elle n'est pas nulle.

Exercice 6. Soient $n \geq 1$ un nombre entier et $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_{n-1}[X]$ l'application définie par $\varphi(P) = P'$.

(1) ♦ On suppose que $n = 3$ et donc que $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_2[X]$.

(a) Justifier que l'application φ est bien définie et qu'elle est linéaire.

(b) Montrer que φ est surjective.

(c) L'application φ est-elle bijective ?

(d) Déterminer le noyau de φ.

(e) Construire une application $\psi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ telle que $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_2[X]}$. A-t-on $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_3[X]}$?

(2) Reprendre la question 1 avec $n \geq 1$ quelconque.

Exercice 7. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par :

$$\text{pour tout } P(X) \in \mathbb{R}_2[X], \qquad \varphi(P)(X) = P(X+1) - P(X).$$

(1) Justifier que l'application φ est linéaire.

(2) Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

(3) Montrer que $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}_1[X]$.

(4) À l'aide du théorème du rang, montrer finalement que l'on a $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}_1[X]$.

Exercice 8.

(1) ♦ À l'aide d'applications linéaires, démontrer que $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 0\}$ et $F = \{\mathbb{R}_7[X] \mid P'(3) = 0\}$ sont des espaces vectoriels.

(2) Soit E un espace vectoriel et soit F un sous-espace vectoriel de E. On considère $H = \{\varphi \in \mathcal{L}(E) \mid F \subset \mathrm{Ker}(\varphi)\}$.
À l'aide de l'application linéaire $\psi\colon \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(F, E)$ définie, pour tout $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, par $\psi(\varphi) = \varphi_{|F}$, justifier que H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 9 (Polynômes interpolateurs de Lagrange)**.** Soient a, b et c trois nombres réels distincts. On considère l'application linéaire $\varphi\colon \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$ définie par $\varphi(P) = (P(a), P(b), P(c))$ pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

(1) Justifier que l'application φ est injective. En déduire que φ est un isomorphisme.

(2) On définit des polynômes L_a, L_b et L_c par

$$L_a(X) = \frac{(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)}, \quad L_b(X) = \frac{(X-a)(X-c)}{(b-a)(b-c)} \quad \text{et} \quad L_c(X) = \frac{(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

Justifier que $L_a, L_b, L_c \in \mathbb{R}_2[X]$ et vérifient, pour x, y dans $\{a, b, c\}$,

$$L_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si } x \neq y \end{cases}.$$

(3) Montrer que la famille $\{L_a, L_b, L_c\}$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

(4) Soient x, y, z des nombres réels. Justifier qu'il existe un unique polynôme $L \in \mathbb{R}_2[X]$ vérifiant $L(a) = x, L(b) = y$ et $L(c) = z$. Quelles sont les coordonnées de L dans la base (L_a, L_b, L_c) ?

(5)$*$ Imaginer le même exercice avec n nombres réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ deux à deux distincts au lieu des 3 nombres réels a, b et c.

Endomorphismes d'un espace vectoriel

Exercice 10. ♦ On considère l'application $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\varphi(x, y, z) = (-3x - y + z,\ 8x + 3y - 2z,\ -4x - y + 2z).$$

(1) Justifier que φ est linéaire.

(2) **(a)** Déterminer une base du noyau de φ et sa dimension.
(b) L'application φ est-elle injective ?
(c) L'application φ est-elle surjective ?

(3) Donner le rang de φ.

(4) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.

(5) Démontrer que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 11. ♦ On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et on considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}^4$ défini par $\varphi(e_1) = (1, 1, -1, -1)$, $\varphi(e_2) = (-1, -1, 1, 1)$, $\varphi(e_3) = (2, 2, 0, 0)$ et $\varphi(e_4) = (3, 3, 0, 0)$.

(1) Donner, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, l'expression de $\varphi(x, y, z, t)$.

(2) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$ puis le rang de φ.

(3) L'application φ est-elle surjective ?

(4) L'application φ est-elle injective ?

(5) Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ puis une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

(6) Déterminer $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi) \cap \mathrm{Im}(\varphi))$.

Exercice 12. Soient E un espace vectoriel et φ, ψ deux endomorphismes de E. On suppose que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$ (on dit que φ et ψ commutent). Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ sont stables par ψ, c'est-à-dire

$$\psi(\mathrm{Ker}(\varphi)) \subset \mathrm{Ker}(\varphi) \quad \text{et} \quad \psi(\mathrm{Im}(\varphi)) \subset \mathrm{Im}(\varphi).$$

Exercice 13. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. On pose, pour tout nombre entier $k \geq 1$,

$$\varphi^{[k]} = \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{k \text{ fois}}.$$

On pourrait montrer que $\varphi^{[k]} \in \mathcal{L}(E)$ pour tout $k \geq 1$.
On suppose que pour tout $x \in E$ il existe un nombre entier n (dépendant de x) tel que $\varphi^{[n]}(x) = 0_E$. Montrer qu'il existe un nombre entier p tel que $\varphi^{[p]} = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (on dit que φ est *nilpotent*).

Exercice 14. Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et φ un endomorphisme de E tel que pour tout $x \in E$, la famille $\{x, \varphi(x)\}$ est liée.
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

(1) Justifier que pour tout nombre entier $i \in \{1, \ldots, n\}$, il existe un nombre réel λ_i (dépendant de i) tel que $\varphi(e_i) = \lambda_i e_i$.

(2) Soit $x = e_1 + \cdots + e_n$. Justifier qu'il existe $\lambda_x \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(x) = \lambda_x x$.

(3) En déduire que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$, puis que φ est une *homothétie* (c'est-à-dire que φ est de la forme $\varphi = \lambda\, \mathrm{id}_E$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$).

Applications linéaires et matrices

Exercice 15. ♦ Soient $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $\theta\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ trois applications linéaires et soient A, B et C les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On suppose que les applications linéaires φ, ψ et θ sont représentées dans les bases canoniques par les matrices A, B et C (pas nécessairement dans cet ordre).

(1) Pour chaque application φ, ψ, θ, déterminer quelle matrice (parmi A, B, C) lui correspond.

(2) Déterminer les expressions de φ, ψ et θ.

(3) Dire, parmi les opérations suivantes, celles que l'on peut former :

$$\varphi \circ \varphi,\ \psi \circ \psi,\ \varphi \circ \theta,\ \theta \circ \varphi,\ \psi \circ \theta,\ \theta \circ \psi.$$

(4) Pour chacune des opérations licites précédentes, écrire la matrice dans les bases canoniques de l'application linéaire obtenue.

Exercice 16. ⧫ Soient φ et g les deux endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ définis par

$$\varphi(x,y) = (2x - 5y,\ -3x + 4y) \quad \text{et} \quad \psi(x,y) = (-8y,\ 7x + y).$$

(1) Déterminer les matrices de φ et ψ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

(2) Déterminer les applications linéaires $\varphi + \psi$, $\varphi \circ \psi$, $\psi \circ \varphi$ et $\varphi \circ \varphi$ ainsi que leurs matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 17. ⧫ Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E, $\mathcal{B}_F = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ une base de F. Soit $\varphi\colon E \to F$ l'application linéaire définie par

$$\varphi(e_1) = -u_1 + 3u_2 - 2u_3 + u_4, \qquad \varphi(e_2) = 2u_1 - u_3, \qquad \varphi(e_3) = 3u_1 + 5u_2 + 4u_3 + 6u_4.$$

(1) Écrire la matrice de φ dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.

(2) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et la dimension de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

(3) En déduire le rang de φ.

(4) L'application φ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 18. Déterminer le noyau et le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 19. ⧫ Soient $n \geq 1$ et $m \geq 1$ deux nombres entiers et soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_m)$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$. Soit $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) Donner les valeurs de n et m .

(2) Exprimer $\varphi(e_1)$ et $\varphi(e_1 + 2e_2)$ en fonction de $e'_1, \ldots, e'_m$.

(3) Déterminer le rang de A et en déduire le rang de φ.

(4) En déduire la dimension du noyau de φ puis donner une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ en faisant le moins de calculs possibles.

(5) L'application linéaire φ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 20. **(1)** ⧫ On reprend l'application linéaire $\varphi\colon \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ de l'exercice 6. Écrire la matrice A de φ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}_2[X]$ puis reprendre les questions **(1)** **(b)** à **(d)** de l'exercice 6 en utilisant les matrices.

(2) Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et ψ l'endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$ défini par $\psi(M) = AM$. Déterminer la matrice de ψ dans la base canonique $\big(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}\big)$ de $M_2(\mathbb{R})$.

Endomorphismes particuliers

Exercice 21. ⧫ On considère l'endomorphisme $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{3}(-x + 2y, -2x + 4y).$$

(1) Montrer que $\varphi \circ \varphi = \varphi$ (on dit que φ est un *projecteur*).

(2) Déterminer son image et son noyau et vérifier qu'ils sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

(3) Écrire la matrice de φ dans une base constituée de la concaténation d'une base de l'image de φ et d'une base du noyau de φ.

Exercice 22. Soient $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$ et

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 2y + z = 0 \text{ et } x - y - z = 0\}.$$

(1) Déterminer une base (u_1, u_2) de P et une base (u_3) de D.

(2) Justifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$ et que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(3) Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $\varphi(u_1) = u_1$, $\varphi(u_2) = u_2$ et $\varphi(u_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$. (On dit que φ est *la projection sur P parallèlement à D*.) Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et vérifier que l'on a $A^2 = A$.

Exercice 23. ⧫ On considère l'endomorphisme $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$\varphi(x,y,z) = (-x - 4y - 2z,\ 4x + 9y + 4z,\ -8x - 16y - 7z).$$

(1) Montrer que φ vérifie $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ (on dit que φ est *une involution*).

(2) Déterminer $F = \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ et $G = \mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.

(3) Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ composée de vecteurs de F et G. Que peut-on en déduire sur les sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^3$?

(4) Écrire la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.

Déterminants

Exercice 24. ⧫

(1) Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 17 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 11 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(2) Soient a, b, c et d des nombres réels. Calculer les déterminants des matrices suivantes et donner des conditions nécessaires et suffisantes sur a, b, c, d pour qu'elles soient inversibles :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}, \quad M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad N_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 25. Pour tous nombres réels a, b, c, on pose

$$\Delta(a,b,c) = \det \begin{pmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{pmatrix}.$$

À l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes, montrer que l'on a

$$\Delta(a,b,c) = 1 + a + b + c.$$

Exercice 26. ⧫ Soit $\varphi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et soient $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (-1,1,0)$ et $u_3 = (1,1,1)$.

(1) Justifier par un calcul de déterminant que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(2) Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.

Extraits d'examens d'années précédentes

Exercice 27 (Examen terminal 2020-2021)**.** Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère la matrice

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer le déterminant de M_α en fonction de α.

(2) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la matrice M_α est inversible.

Exercice 28 (Examen terminal 2021-2022)**.**
On considère l'endomorphisme $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (que l'on notera $\mathcal{C}$) est $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & 9 & 4 \\ 4 & -21 & -9 \end{pmatrix}$.
On note $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.
On note u_1, u_2 et u_3 les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dont les coordonnées dans la base canonique $\mathcal{C}$ sont respectivement $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(1) Montrer que $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(2) Donner une base et la dimension de $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$. En déduire $f(u_1)$.

(3) Calculer $f(u_2)$ et $f(u_3)$.

(4) Déterminer la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}_1$.

(5) Calculer le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. En déduire que f est bijective, et déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.
On pose $g = f \circ f$ et $h = g \circ g$.

(6) Calculer B^4. En déduire que $h = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.

(7) Sans calcul, déterminer A^4 (en justifiant la réponse).

Exercice 29 (Examen terminal 2022-2023)**.**

(1) Calculer le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

On considère la famille $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, v_3\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ où :

$$v_1 = (2,-1,1), \;\; v_2 = (-1,2,1), \;\; v_3 = (-1,1,2).$$

On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2}(3x + y + z, -3x - y - z, 0).$$

(2) Démontrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(3) Donner la matrice A de f dans la base $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^3$.

(4) L'application linéaire f est-elle surjective ? Est-elle injective ?

(5) Déterminer une base de l'image de f et le rang de f.

(6) Déterminer la dimension du noyau de f.

Correction des exercices

N'hésitez pas à signaler les inévitables coquilles et à transmettre vos commentaires à Julian Le Clainche ou à Vincent Souveton.

Applications linéaires

Correction de l'Exercice 1.

- *Pour montrer qu'une application $\varphi : E \to F$ est linéaire, il faut et il suffit de montrer que pour tous vecteurs $x, y \in E$ et pour tout scalaire $\lambda \in \mathbf{R}$, $\varphi(\lambda x + y) = \lambda\varphi(x) + \varphi(y)$ ou bien, ce qui est équivalent, que $\varphi(x + \lambda y) = \varphi(x) + \lambda\varphi(y)$.*
- *Pour montrer qu'une application $\varphi : E \to F$ n'est pas linéaire, il faut et il suffit de trouver un contre-exemple avec deux vecteurs $x, y \in E$ et un scalaire $\lambda \in \mathbf{R}$ tels que $\varphi(x + \lambda y) \neq \varphi(x) + \lambda\varphi(y)$. En pratique :*
  - *si $\varphi(0_E) \neq 0_F$, alors φ n'est pas linéaire ;*
  - *si on trouve deux vecteurs $x, y \in E$ tels que $\varphi(x + y) \neq \varphi(x) + \varphi(y)$, alors φ n'est pas linéaire ;*
  - *si on trouve un vecteur $x \in E$ et un scalaire $\lambda \in \mathbf{R}$ tels que $\varphi(\lambda x) \neq \lambda\varphi(x)$, alors φ n'est pas linéaire.*

(1) Soient $x, y \in \mathbf{R}$ et $\lambda \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}\varphi_1(x + \lambda y) &= -x - \lambda y \\ &= \varphi_1(x) + \lambda\varphi_1(y)\end{aligned}$$

Donc φ_1 est linéaire.

(2) On a $\varphi_2(2 \times 1) = 4$ et $2 \times \varphi_2(1) = 2$. Donc $\varphi_2(2 \times 1) \neq 2 \times \varphi_2(1)$ et l'application n'est pas linéaire.

(3) Soient $(x, y), (x', y') \in \mathbf{R}^2$ et $\lambda \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}\varphi_3((x, y) + \lambda(x', y')) &= \varphi_3(x + \lambda x', y + \lambda y') \\ &= (y + \lambda y', x + \lambda x') \\ &= (y, x) + \lambda(y', x') \\ &= \varphi_3(x, y) + \lambda\varphi_3(x', y')\end{aligned}$$

L'application φ_3 est donc linéaire.

(4) Soient $(x, y), (x', y') \in \mathbf{R}^2$ et $\lambda \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}\varphi_4((x, y) + \lambda(x', y')) &= \varphi_4(x + \lambda x', y + \lambda y') \\ &= (x + y + \lambda(x' + y'), x - 2y + \lambda(x' - 2y'), 0) \\ &= (x + y, x - 2y, 0) + \lambda(x' + y', x' - 2y', 0) \\ &= \varphi_4(x, y) + \lambda\varphi_4(x', y')\end{aligned}$$

L'application φ_4 est donc linéaire.

(5) $\varphi_5(0, 0) = (0, 0, 1) \neq (0, 0, 0)$ donc φ_5 n'est pas linéaire.

(6) Soient $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbf{R}^3$ et $\lambda \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}\varphi_6((x, y, z) + \lambda(x', y', z')) &= \varphi_6(x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z') \\ &= (x - y + \lambda(x' - y'), x + y + \lambda(x' + y')) \\ &= (x - y, x + y) + \lambda(x' - y', x' + y') \\ &= \varphi_6(x, y) + \lambda\varphi_6(x', y')\end{aligned}$$

On a donc montré que φ_6 est linéaire

(7) On considère l'application $\varphi_7 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i \end{array}$.

Montrons que φ_7 est une application linéaire. Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. On a

$$\begin{aligned}\varphi_7(x + \lambda y) &= \varphi_7((x_1 + \lambda y_1, \dots, x_n + \lambda y_n)) \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i + \lambda y_i) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i + \lambda \sum_{i=1}^n y_i \\ &= \varphi_7(x) + \lambda\varphi_7(y).\end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que $\varphi_7 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ est une application linéaire.

(8) On a $\varphi_8\left(2\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right) = 4$ et $2\varphi_8\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right) = 2$ donc φ_8 n'est pas linéaire.

(9) Posons $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{pmatrix}$. Soient $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ et $\lambda \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}\varphi_9\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\right) &= A\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\right) \\ &= A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \lambda A\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \\ &= \varphi_9\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) + \lambda\varphi_9\left(\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

Donc φ_9 est linéaire.

(10) On considère l'application $\varphi_{10}: \begin{array}{ccc} M_2(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & a+d \end{array}$

Montrons que φ_{10} est une application linéaire.

Soient $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned} \varphi_{10}(M+\lambda N) &= \varphi_{10}(\begin{pmatrix} a+\lambda\alpha & b+\lambda\beta \\ c+\lambda\gamma & d+\lambda\delta \end{pmatrix}) \\ &= (a+\lambda\alpha)+(d+\lambda\delta) \\ &= a+d+\lambda(\alpha+\delta) \\ &= \varphi_{10}(M)+\lambda\varphi_{10}(N). \end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que $\varphi_{10} : M_2(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ est une application linéaire.

(11) Soient $P, Q \in \mathbf{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} \varphi_{11}(P+\lambda Q) &= ((P+\lambda Q)(0), (P+\lambda Q)(1)) \\ &= (P(0), P(1)) + \lambda(Q(0), Q(1)) \\ &= \varphi_{11}(P) + \lambda\varphi_{11}(Q) \end{aligned}$$

Donc φ_{11} est linéaire.

(12) Soient $P, Q \in \mathbf{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} \varphi_{12}((P+\lambda Q)(X)) &= (P+\lambda Q)(X^2) \\ &= P(X^2) + \lambda Q(X^2) \\ &= \varphi_{12}(P(X)) + \lambda\varphi_{12}(Q(X^2)) \end{aligned}$$

Donc φ_{12} est linéaire.

(13) On considère l'application $\varphi_{13}: \begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X) - XP'(X) \end{array}$

Montrons que φ_{13} est une application linéaire. Soient $P, Q \in \mathbf{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. On a

$$\begin{aligned} \varphi_{13}((P+\lambda Q)(X)) &= (P+\lambda Q)(X) - X(P+\lambda Q)'(X) \\ &= P(X) + \lambda Q(X) - X(P'(X) + \lambda Q'(X)) \\ &= P(X) + \lambda Q(X) - XP'(X) + \lambda XQ'(X)) \\ &= P(X) - XP'(X) + \lambda(Q(X) - XQ'(X)) \\ &= \varphi_{13}(P) + \lambda\varphi_{13}(Q) \end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que $\varphi_{13} : \mathbf{R}[X] \to \mathbf{R}[X]$ est une application linéaire.

(14) Soient $P, Q \in \mathbf{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, pour $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned} (\varphi_{14}((P+\lambda Q)))(x) &= (P+\lambda Q)(x) \\ &= P(x) + \lambda Q(x) \\ &= \varphi_{14}(P)(x) + \lambda\varphi_{14}(Q)(x) \end{aligned}$$

On a donc $(\varphi_{14}(P+\lambda Q))(x) = \varphi_{14}(P)(x) + \lambda\varphi_{14}(Q)(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ et donc $\varphi_{14}(P+\lambda Q) = \varphi_{14}(P) + \lambda\varphi_{14}(Q)$. On a donc montré que $\varphi_{14} : \mathbf{R}[X] \to \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ est linéaire.

(15) Soient $u, v \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned} \varphi_{15}(u+\lambda v) &= ((u+\lambda v)_2, (u+\lambda v)_5, (u+\lambda v)_3 + (u+\lambda v)_6) \\ &= (u_2+\lambda v_2, u_5+\lambda v_5, u_3+\lambda v_3+u_6+\lambda v_6) \\ &= (u_2, u_5, u_3+u_6) + \lambda(v_2, v_5, v_3+v_6) \\ \varphi_{15}(u+\lambda v) &= \varphi_{15}(u) + \lambda\varphi_{15}(v) \end{aligned}$$

On a donc montré que $\varphi_{15}(u+\lambda v) = \varphi_{15}(u)+\lambda\varphi_{15}(v)$ pour $u, v \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Autrement dit $\varphi_{15} : \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \to \mathbf{R}^3$ est une application linéaire.

(16) L'application $\varphi_{16}: \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^{\mathbf{N}} & \longrightarrow & \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbf{N}} & \mapsto & (u_n u_{n+1})_{n\in\mathbf{N}} \end{array}$ n'est pas linéaire. En effet, on note $\mathbf{1}$ la suite telle que $\mathbf{1}_n = 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Pour $n \in \mathbf{N}$, on a

$$(\varphi_{16}(2\times\mathbf{1}))_n = 2\times 2 = 4 \neq 2\times 1 = 2\,(\varphi_{16}(\mathbf{1}))_n.$$

(17) L'application $\varphi_{17}: \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \\ g & \mapsto & (x \mapsto 7g(x)+x) \end{array}$ n'est pas une application linéaire. En effet, si $f : E \to F$ est linéaire, on a $f(0_E) = 0_F$. Or, on a

$$\varphi_{17}(0_{\mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})}) = (x \mapsto x) \neq 0_{\mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})} \text{ donc } \varphi_{17} \text{ n'est pas linéaire.}$$

(18) Il est bien connu que pour $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ et $\lambda \in \mathbf{R}$ on a $(f+\lambda g)' = f' + \lambda g'$. Autrement dit, l'application φ_{18} est linéaire.

(19) Soient $f, g \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Pour $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned} (\varphi_{19}(f+\lambda g))(x) &= ((f+\lambda g)\circ\sin)(x) \\ &= (f+\lambda g)(\sin(x)) \\ &= f(\sin(x)) + \lambda g(\sin(x)) \\ &= \varphi_{19}(f)(x) + \lambda\varphi_{19}(g)(x). \end{aligned}$$

On a donc $\varphi_{19}(f+\lambda g) = \varphi_{19}(f) + \lambda\varphi_{19}(g)$ et donc $\varphi_{19} : \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \to \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ est linéaire.

(20) L'application φ_{20} n'est pas linéaire. En effet, pour $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\varphi_{20}(2\times \mathrm{id}_{\mathbf{R}})(x) = \sin(2x)$$

et pour $x = \frac{\pi}{2}$, on a donc $\varphi_{20}(2\times\mathrm{id}_{\mathbf{R}})(\frac{\pi}{2}) = \sin(\pi) = 0$ or $2\varphi_{20}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}})(\frac{pi}{2}) = 2\sin(\frac{\pi}{2}) = 2$. Ainsi $\varphi_{20}(2\times\mathrm{id}_{\mathbf{R}}) \neq 2\varphi_{20}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}})$ et donc φ_{20} n'est pas linéaire.

Correction de l'Exercice 2.

(1) **(a)** Soient $(x,y),(x',y')\in\mathbf{R}^2$ et $\lambda\in\mathbf{R}$. On a

$$\begin{aligned}&\varphi(\lambda(x,y)+(x',y'))=\varphi(\lambda x+x',\lambda y+y',\lambda z+z')\\&=(\lambda x+x'+\lambda y+y',\lambda x+x'-\lambda y-y',\lambda x+x'+\lambda y+y')\\&=\lambda(x+y,x-y,x+y)+(x'+y',x'-y',x'+y')\\&=\lambda\varphi(x,y)+\varphi(x',y')\end{aligned}$$

Donc φ est bien linéaire.

$$(x,y)\in\operatorname{Ker}\varphi\iff\varphi(x,y)=(0,0,0)\iff\begin{cases}x+y=0\\x-y=0\\x+y=0\end{cases}\iff x=y=0.$$

— Méthode 1 : *Soit $\varphi:E\to F$ une application linéaire. Si $(u_1,...,u_p)$ est une base de E, alors $(\varphi(u_1),...,\varphi(u_p))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im}\varphi$, ce qui s'écrit aussi $\operatorname{Im}\varphi=\operatorname{Vect}(\varphi(u_1),...,\varphi(u_p))$.*

Ainsi, notons $e_1=(1,0)$ et $e_2=(0,1)$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$. Alors, $\operatorname{Im}\varphi=\operatorname{Vect}(\varphi(e_1),\varphi(e_2))=\operatorname{Vect}((1,1,1),(1,-1,1))$.

— Méthode 2 : On peut aussi exprimer ce que signifie pour un vecteur d'appartenir à $\operatorname{Im}\varphi$:

$$\begin{aligned}(x,y,z)\in\operatorname{Im}\varphi&\iff\exists a,b\in\mathbf{R}\text{ tq }(x,y,z)=(a+b,a-b,a+b)\\&\iff\exists a,b\in\mathbf{R}\text{ tq }\begin{cases}a+b=x\\a-b=y\\a+b=z\end{cases}\\&\iff\exists a,b,c\in\mathbf{R}\text{ tq }\begin{cases}a=\frac{x+y}{2}\\b=\frac{x-y}{2}\\0=z-x\end{cases}\end{aligned}$$

Or, ce dernier système admet des solutions a,b ssi $x=z$. Donc $\operatorname{Im}\varphi=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3|x-z=0\}=\{(x,y,x)|x,y\in\mathbf{R}\}$.

(b) On a $\operatorname{Ker}\varphi=\{0_{\mathbf{R}^3}\}$ donc l'application est injective. De plus, on a montré que $\dim\operatorname{Im}\varphi\leq 2$ donc $\operatorname{Im}\varphi\neq\mathbf{R}^3$ et l'application n'est pas surjective.

(2) **(a)** Soient $u=(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$, $v=(a,b,c)\in\mathbf{R}^3$ et $\lambda\in\mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}&\psi(u+\lambda v)=\psi\left((x+\lambda a,y+\lambda b,z+\lambda c)\right)\\&=(2(x+\lambda a)+(y+\lambda b)+(z+\lambda c),(y+\lambda b)-z+\lambda c,(x+\lambda a)+(y+\lambda b))\\&=(2x+y+z,y-z,x+y)+\lambda(2a+b+c,b-c,a+b)\\&=\psi(u)+\lambda\psi(v).\end{aligned}$$

L'application ψ est donc linéaire.

Déterminons le noyau de ψ. Pour $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$, on a

$$\begin{aligned}(x,y,z)\in\operatorname{Ker}(\psi)&\iff\begin{cases}2x+y+z=0\\y-z=0\\x+y=0\end{cases}\\&\iff\begin{cases}2x+y+z=0\\z=y\\x=-y\end{cases}\\&\iff\begin{cases}y=-2x-z=2y-y\\z=y\\x=-y\end{cases}\end{aligned}$$

Finalement, on a montré que $\operatorname{Ker}(\psi)=\{(x,y,z\in\mathbf{R}^3\quad|\quad x+y=0=y-z\}$.

On note (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$, on sait que $\operatorname{Im}(\psi)=\operatorname{Vect}(\psi(e_1),\psi(e_2),\psi(e_3))$. Ici, on a

$$\psi(e_1)=(2,0,1),\quad\psi(e_2)=(1,1,1),\quad\psi(e_3)=(1,-1,0).$$

On a donc $\operatorname{Im}(\psi)=\operatorname{Vect}((2,0,1),(1,1,1),(1,-1,0))$. De plus, on remarque que $\psi(e_1)=\psi(e_2)+\psi(e_3)$ et donc $\operatorname{Im}(\psi)=\operatorname{Vect}((1,1,1),(1,-1,0))$. En particulier $\dim(\operatorname{Im}(\psi))\leq 2$ et donc $\operatorname{Im}(\psi)\neq\mathbf{R}^3$.

(b) On a montré que $\operatorname{Ker}(\psi)\neq\{0_{\mathbf{R}^3}\}$ et $\operatorname{Im}(\psi)\neq\mathbf{R}^3$ donc ψ n'est ni injective ni surjective.

Correction de l'Exercice 3.

(1) Supposons φ injective. Soient $a_1,\dots,a_p\in\mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned}&a_1\varphi(u_1)+...+a_p\varphi(u_p)=0_F\\&\iff\varphi(a_1u_1+...+a_pu_p)=0_F\\&\iff a_1u_1+...+a_pu_p=0_E\quad\text{(injectivité de }\varphi)\\&\iff a_1=...=a_p=0\quad\text{(liberté de la famille }\{u_1,...,u_p\})\end{aligned}$$

Donc la proposition est vraie si φ est injective.

Maintenant, considérons l'application linéaire $\varphi:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$, $(x,y)\mapsto x$, qui est surjective. Alors, $\{(1,0),(0,1)\}$ est libre dans $\mathbf{R}^2$ mais $\{\varphi(1,0),\varphi(0,1)\}=\{1,0\}$ n'est pas libre dans $\mathbf{R}$. Donc la proposition est fausse en général si φ est surjective (et donc fausse en général aussi dans le cas où φ est quelconque).

(2) Soit φ une application linéaire, on suppose que la famille $\{\varphi(u_1),\ \cdots,\ \varphi((u_p)\}$ est libre. Soient $a_1,\dots,a_p\in\mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{aligned}&a_1u_1+...+a_pu_p=0_E\implies\varphi(a_1u_1+...+a_pu_p)=0_F\quad(\text{car }\varphi(0_E)=0_F)\\&\implies a_1\varphi(u_1)+...+a_p\varphi(u_p)=0_F\\&\implies a_1=...=a_p=0\quad\text{(liberté de la famille }\{\varphi(u_1),...,\varphi(u_p)\})\end{aligned}$$

Ainsi, la proposition est vraie pour φ quelconque (et donc en particulier si elle est injective ou surjective).

(3) Supposons φ surjective. Alors, pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = \varphi(x)$. Puisque la famille $\{u_1, ..., u_p\}$ est génératrice, alors il existe des scalaires $a_1, ..., a_p \in \mathbf{R}$ tels que $x = a_1u_1 + ... + a_pu_p$. Ainsi, pour tout $y \in F$, il existe des scalaires $a_1, ..., a_p \in \mathbf{R}$ tels que

$$\begin{aligned} y &= \varphi(x) \\ &= \varphi(a_1u_1 + ... + a_pu_p) \\ &= a_1\varphi(u_1) + ... + a_p\varphi(u_p) \end{aligned}$$

Donc la famille $\{\varphi(u_1), ..., \varphi(u_p)\}$ est génératrice de F. Ainsi, la proposition est vraie si φ est surjective.
Par contre, prenons l'application linéaire $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2, x \mapsto (x, 2x)$, qui est injective. Alors, la famille $\{1\}$ est génératrice de $\mathbf{R}$ mais $\{\varphi(1)\} = \{(1, 2)\}$ n'est pas génératrice de $\mathbf{R}^2$. Donc la proposition est fausse en général si φ est injective (et donc fausse en général aussi dans le cas où φ est quelconque).

(4) Supposons φ injective. Pour tout $x \in E$, il existe des scalaires $a_1, ..., a_p \in \mathbf{R}$ tels que $\varphi(x) = a_1\varphi(u_1) + ... + a_p\varphi(u_p)$, puisque la famille $\{\varphi(u_1), ..., \varphi(u_p)\}$ est génératrice de F et que $\varphi(x) \in F$. Ainsi :

$$\begin{aligned} &\varphi(x) = a_1\varphi(u_1) + ... + a_p\varphi(u_p) = \varphi(a_1u_1 + ... + a_pu_p) \\ \iff &x = a_1u_1 + ... + a_pu_p \quad \text{(injectivité de } \varphi\text{)} \end{aligned}$$

Donc la proposition est vraie si φ est injective.
Par contre, prenons l'application linéaire $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (x, y) \mapsto x$, qui est surjective. Alors, la famille $\{\varphi(1, 0)\} = \{1\}$ est génératrice de $\mathbf{R}$ mais $\{(1, 0)\}$ n'est pas génératrice de $\mathbf{R}^2$. Donc la proposition est fausse en général si φ est surjective (et donc fausse en général aussi dans le cas où φ est quelconque).

Correction de l'Exercice 4.

(1) On raisonne par double implication
$\boxed{\Leftarrow}$ Montrons que si $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(\psi)$ alors $\psi \circ \varphi = 0_{\mathcal{L}(E,G)}$.
Soit $x \in E$, on a $\psi \circ \varphi(x) = \psi(\varphi(x))$ or par hypothèse $\varphi(x) \in \mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(\psi)$ et donc $\psi(\varphi(x)) = 0$. Ainsi on a $\psi \circ \varphi = 0_{\mathcal{L}(E,G)}$.
$\boxed{\Rightarrow}$ Montrons que si $\psi \circ \varphi = 0_{\mathcal{L}(E,G)}$ alors $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(\psi)$.
On suppose que $\psi \circ \varphi = 0_{\mathcal{L}(E,G)}$. Soit $x \in E$, on veut montrer que $y = \varphi(x) \in \mathrm{Ker}(\psi)$.
Par hypothèse, on a $\psi(y) = \psi \circ \varphi(x) = 0_G$ et donc $y \in \mathrm{Ker}(\psi)$.
On a donc $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(\psi)$.

(2) On raisonne par double inclusion.
$\boxed{\subset}$ Montrons que $\varphi(\mathrm{Ker}(\psi \circ \varphi)) \subset \mathrm{Ker}(\psi) \cap \mathrm{Im}(\varphi)$.
Soit $y \in \varphi(\mathrm{Ker}(\psi \circ \varphi))$, par définition, il existe $x \in \mathrm{Ker}(\psi \circ \varphi)$ tel que $y = \varphi(x)$.
En particulier, on a $y = \varphi(x) \in \mathrm{Im}(\varphi)$.
De plus, $\psi(y) = \psi(\varphi(x)) = \psi \circ \varphi(x) = 0$ donc $y \in \mathrm{Ker}(\psi)$.
Ainsi, on a $x \in \mathrm{Ker}(\psi) \cap \mathrm{Im}(\varphi)$ et donc $\varphi(\mathrm{Ker}(\psi \circ \varphi)) \subset \mathrm{Ker}(\psi) \cap \mathrm{Im}(\varphi)$.
$\boxed{\supset}$ Montrons que $\mathrm{Ker}(\psi) \cap \mathrm{Im}(\varphi) \subset \varphi(\mathrm{Ker}(\psi \circ \varphi))$.
Soit $y \in \mathrm{Ker}(\psi) \cap \mathrm{Im}(\varphi)$, par définition, il existe $x \in E$ tel que $y = \varphi(x)$.
On a $\psi \circ \varphi(x) = \psi(y) = 0_G$ car $y \in \mathrm{Ker}(\psi)$ et donc $x \in \mathrm{Ker}(\psi \circ \varphi)$. Autrement dit, on a montré que $y = \varphi(x) \in \varphi(\mathrm{Ker}(\psi \circ \varphi))$.
D'où $\mathrm{Ker}(\psi) \cap \mathrm{Im}(\varphi) \subset \varphi(\mathrm{Ker}(\psi \circ \varphi))$.
Finalement, on a montré l'égalité $\varphi(\mathrm{Ker}(\psi \circ \varphi)) = \mathrm{Ker}(\psi) \cap \mathrm{Im}(\varphi)$.

Correction de l'Exercice 5.

• Il est clair que si $\varphi : E \to \mathbf{R}$ est surjective alors elle n'est pas nulle.

• Montrons que si $\varphi : E \to \mathbf{R}$ n'est pas nulle, alors elle est surjective.
Supposons que $\varphi \neq 0_{\mathcal{L}(E,\mathbf{R})}$. Par définition, il existe $x \in E$ tel que $\varphi(x) \neq 0$.
Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. On a $\varphi(\frac{\lambda}{\varphi(x)}x) = \frac{\lambda}{\varphi(x)}\varphi(x) = \lambda$. Ainsi, on a prouvé que tout $\lambda \in \mathbf{R}$ admet un antécédent par φ, autrement dit φ est surjective.

Correction de l'Exercice 6.

(1) **(a)** La dérivée d'un polynôme $aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbf{R}_3[X]$, avec $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, est le polynôme $3aX^2 + 2bX + c \in \mathbf{R}_2[X]$ donc l'application est bien définie. De plus, pour tous $P, Q \in \mathbf{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, on a clairement :

$$\varphi(P + \lambda Q) = (P + \lambda Q)' = P' + (\lambda Q)' = P' + \lambda Q' = \varphi(P) + \lambda\varphi(Q)$$

donc cette application est linéaire.

(b) La base canonique de $\mathbf{R}_3[X]$ est $(1, X, X^2, X^3)$. Ainsi, d'après le cours, $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Vect}(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2), \varphi(X^3)) = \mathrm{Vect}(0, 1, 2X, 3X^2) = \mathrm{Vect}(1, X, X^2) = \mathbf{R}_2[X]$. Donc φ est surjective.

(c) On a $\dim \mathbf{R}_3[X] = 4$ et $\dim \mathbf{R}_2[X] = 3$. Comme $4 \neq 3$, alors φ n'est pas un isomorphisme.

(d) Soit $aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbf{R}_3[X]$. Alors :

$$\begin{aligned} aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathrm{Ker}\,\varphi &\iff \varphi(aX^3 + bX^2 + cX + d) = 0 \\ &\iff 3aX^2 + 2bX + c = 0 \\ &\iff \begin{cases} 3a = 0 \\ 2b = 0 \\ c = 0 \\ d = d \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est l'ensemble des polynômes constants $\mathbf{R}_0[X]$.

(e) On pose :

$$\psi : \quad \mathbf{R}_2[X] \longrightarrow \mathbf{R}_3[X]$$
$$aX^2+bX+c \longmapsto \frac{a}{3}X^3+\frac{b}{2}X^2+cX$$

Montrons que ψ est linéaire.
Soient $P = aX^2+bX+c,\ Q = a'X^2+b'X+c' \in \mathbf{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}&\psi(P+\lambda Q)\\ &= \psi((a+\lambda a')X^2+(b+\lambda b')X+(c+\lambda c'))\\ &= \frac{a+\lambda a'}{3}X^3+\frac{b+\lambda b'}{2}X^2+(c+\lambda c')X\\ &= \frac{a}{3}X^3+\frac{b}{2}X^2+cX+\lambda\frac{a'}{3}X^3+\lambda\frac{b'}{2}X^2+\lambda c'X\\ &= \psi(P)+\lambda\psi(Q)\end{aligned}$$

Et enfin, ψ vérifie la propriété demandée : pour $aX^2+bX+c \in \mathbf{R}_2[X]$,

$$\begin{aligned}\varphi\circ\psi(aX^2+bX+c) &= \varphi\left(\frac{a}{3}X^3+\frac{b}{2}X^2+cX\right)\\ &= \left(\frac{a}{3}X^3+\frac{b}{2}X^2+cX\right)'\\ &= aX^2+bX+c\end{aligned}$$

En revanche, $\psi\circ\varphi \neq \mathrm{id}_{\mathbf{R}_3[X]}$. Par exemple, $\psi\circ\varphi(1) = \psi(0) = 0 \neq 1$.

(2) Le raisonnement dans le cas général est identique. Pour l'application ψ, on prend

$$\psi : \quad \mathbf{R}_{n-1}[X] \longrightarrow \mathbf{R}_n[X]$$
$$a_{n-1}X^{n-1}+\ldots+a_1X+a_0 \longmapsto \frac{a_{n-1}}{n}X^n+\ldots+\frac{a_1}{2}X^2+a_0X$$

Correction de l'Exercice 7.

(1) Soient $P, Q \in \mathbf{R}_2[X]$ et $c \in \mathbf{R}$. Alors on a immédiatement

$$\begin{aligned}\varphi(P+cQ)(X) &= (P+cQ)(X+1)-(P+cQ)(X)\\ &= P(X+1)+cQ(X+1)-P(X)-cQ(X+1)\\ &= P(X+1)-P(X)+c\,(Q(X+1)-Q(X))\\ &= \varphi(P)(X)+c\varphi(Q)(X)\end{aligned}$$

Donc l'application φ est bien linéaire.

(2) Soit $P = aX^2+bX+c \in \mathbf{R}_2[X]$

$$\begin{aligned}P \in \mathrm{Ker}(\varphi) &\iff \varphi(P)(X) = 0\\ &\iff a(X+1)^2+b(X+1)+c-aX^2-bX-c = 0\\ &\iff 2aX+a+b = 0\\ &\iff a = b = 0\end{aligned}$$

Ainsi, un polynôme est dans le noyau de φ si et seulement si il s'agit d'un polynôme constant. Donc $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathbf{R}_0[X]$.

(3) Soit $Q \in \mathrm{Im}\,\varphi$. Alors, par définition, il existe $P = aX^2+bX+c \in \mathbf{R}_2[X]$ tel que $Q(X) = \varphi(P)(X)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}Q(X) &= a(X+1)^2+b(X+1)+c-aX^2-bX-c\\ &= 2aX+a+b\end{aligned}$$

Cela implique que Q est de degré au plus 1. On a montré que $\mathrm{Im}\,\varphi \subset \mathbf{R}_1[X]$.

(4) L'application $\varphi : \mathbf{R}_2[X] \to \mathbf{R}_2[X]$ est linéaire avec $\dim \mathbf{R}_2[X] < +\infty$. On peut donc appliquer le théorème du rang :

$$\begin{aligned}\dim \mathbf{R}_2[X] = \dim \mathrm{Ker}(\varphi)+\dim \mathrm{Im}(\varphi) &\iff \dim \mathrm{Im}(\varphi) = \dim \mathbf{R}_2[X]-\dim \mathrm{Ker}(\varphi)\\ &\iff \dim \mathrm{Im}(\varphi) = 3-1 = 2\end{aligned}$$

On a prouvé que $\mathrm{Im}\,\varphi \subset \mathbf{R}_1[X]$ avec $\dim \mathrm{Im}(\varphi) = 2 = \dim \mathbf{R}_1[X]$. Cela montre que $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbf{R}_1[X]$.

Correction de l'Exercice 8.

(1) *Ici, l'idée est de trouver des espaces vectoriels G, G' et une application linéaire $f : G \to G'$ telle que $E = \mathrm{Ker}(f)$ ou $E = \mathrm{Im}(f)$. On peut alors conclure en utilisant le fait que le noyau et l'image d'une application linéaire sont des sous-espaces vectoriels (de l'espace de départ et d'arrivée respectivement).*

- On considère l'application $f : \begin{array}{ccc}\mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}\\ P & \mapsto & P(0)\end{array}$.

  Il est clair que f est linéaire (l'évaluation d'un polynôme en un point est linéaire). De plus, on a

  $$\mathrm{Ker}(f) = \{P \in \mathbf{R}[X] \mid f(P) = 0\} = \{P \in \mathbf{R}[X] \mid P(0) = 0\} = E.$$

  L'ensemble E est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$.
- On considère l'application $g : \begin{array}{ccc}\mathbf{R}_7[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}\\ P & \mapsto & P'(3)\end{array}$.

  Il est clair que g est linéaire (l'évaluation d'un polynôme en un point et la dérivation sont linéaires).De plus, on a

  $$\mathrm{Ker}(g) = \{P \in \mathbf{R}_7[X] \mid g(P) = 0\} = \{P \in \mathbf{R}_7[X] \mid P'(3) = 0\} = F.$$

  L'ensemble F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_7[X]$.

(2) Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. On considère $H = \{\varphi \in \mathcal{L}(E) \mid F \subset \mathrm{Ker}(\varphi)\}$. On pose $\psi : \begin{array}{ccc}\mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(F,E)\\ \varphi & \mapsto & \varphi_{|F}\end{array}$.
L'application ψ est linéaire (cf. cours). On va montrer que $H = \mathrm{Ker}(\psi)$ et on aura donc que H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
On raisonne par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ Soit $\varphi \in H$, montrons que $\varphi \in \mathrm{Ker}(\psi)$. Pour $x \in F$, on a

$$\psi(\varphi)(x) = \varphi_{|F}(x) = \varphi(x) = 0_E$$

car $x \in F \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$. Ainsi, $\psi(\varphi) = 0_{\mathcal{L}(E,F)}$ et $\varphi \in \mathrm{Ker}(\psi)$.
On a donc $H \subset \mathrm{Ker}(\psi)$.

$\boxed{\supset}$ Soit $\varphi \in \mathrm{Ker}(\psi)$, montrons que $\varphi \in H$.
On veut montrer que $F \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$. Pour $x \in F$, on a

$$\varphi(x) = \varphi_{|F}(x) = \psi(\varphi)(x) = 0_E$$

car $\varphi \in \mathrm{Ker}(\psi)$. Ainsi $x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ et donc $F \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$, c'est à dire $\varphi \in H$.
On a donc $\mathrm{Ker}(\psi) \subset H$.
Finalement, on a montré que $H = \mathrm{Ker}(\psi)$ et donc H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Correction de l'Exercice 9.

(1) Soit $P \in \mathbf{R}_2[X]$ tel que $\varphi(P) = (0,0,0)$. Alors P est un polynôme de degré inférieur ou égal 2 admettant 3 racines distinctes (en a, b et c). Or on sait que tout polynôme non nul Q admet au plus $\deg(Q)$ racines réelles et donc $P = 0$. On a donc montré que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_{\mathbf{R}_2[X]}\}$ et donc φ est injective.
On sait que φ est une application injective de $\mathbf{R}_2[X]$ dans $\mathbf{R}^3$ or $\dim(\mathbf{R}_2[X]) = \dim(\mathbf{R}^3) = 3$ et donc φ est un isomorphisme.

(2) Il s'agit d'une vérification directe.

(3) Montrons que la famille $\{L_a, L_b, L_c\}$ est libre. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ tels que $Q := \alpha L_a + \beta L_b + \gamma L_c = 0$.
On a $0 = Q(a) = \alpha$ d'après la question précédente.
En évaluant Q en b et c, on montre de même que $\beta = \gamma = 0$ et donc la famille $\{L_a, L_b, L_c\}$ est libre.
C'est une famille libre à 3 éléments dans $\mathbf{R}_2[X]$ or $\dim(\mathbf{R}_2[X]) = 3$ donc (L_a, L_b, L_c) est une base de $\mathbf{R}_2[X]$.

(4) Soient $x, y, z \in \mathbf{R}$. D'après la question 1, l'application φ est un isomorphisme. Ainsi, en posant $L = \varphi^{-1}(x, y, z)$, il est clair que L est l'unique polynôme de $\mathbf{R}_2[X]$ vérifiant $L(a) = x, L(b) = y$ et $L(c) = z$.
De plus, on remarque aisément (en utilisant la question 2) que cette condition est vérifiée par le polynôme $xL_a + yL_b + zL_c$. Finalement, les coordonnées de L dans la base (L_a, L_b, L_c) sont données par (x, y, z).

(5) Soit $n \geq 1$ et $a_1, ..., a_n$ n réels distincts. On considère l'application linéaire $\varphi : \mathbf{R}_{n-1}[X] \to \mathbf{R}^n$ définie par $\varphi(P) = (P(a_1), \dots, P(a_n)$ pour tout $P \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$.
On pose pour $i \in \{1, \dots, n\}$, $L_i(X) = \prod_{k=1, k\neq i}^{n} \frac{X - a_k}{a_i - a_k} \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
On peut montrer comme dans les questions précédentes que $\varphi : \mathbf{R}_{n-1}[X] \to \mathbf{R}^n$ est un isomorphisme, que $(L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ et que pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$ tel que $P(a_i) = x_i$ donné par

$$P(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i L_i(X)$$

Endomorphismes d'un espace vectoriel

Correction de l'Exercice 10.

(1) Pour $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, les coordonnées de $\varphi(x, y, z)$ sont des combinaisons linéaires de x, y et z, l'application f est donc linéaire.

(2) **(a)** Pour $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, on a

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y,z) = 0_{\mathbf{R}^3} &\iff \begin{cases} -3x - y + z = 0 \\ 8x + 3y - 2z = 0 \\ -4x - y + 2z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -3x - y + z = 0 \\ -x + z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} z = x \\ y = -2x \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = x \times 1 \\ y = x \times (-2) \\ z = x \times 1 \end{cases} \\
&\iff (x, y, z) = x(1, -2, 1)
\end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}((1, -2, 1))$ donc $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1 dont une base est donnée par $((1, -2, 1))$.

(b) On a montré que $\mathrm{Ker}(\varphi) \neq \{0_{\mathbf{R}^3}\}$ donc par définition, l'application φ n'est pas injective.

(c) L'application φ est un endomorphisme donc elle est injective si et seulement si elle est surjective. Ainsi, φ n'est pas surjective.

(3) D'après le théorème du rang, on a

$$\mathrm{rg}(\varphi) + \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \dim(\mathbf{R}^3) = 3.$$

Or, ici on a $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 1$ et donc $\mathrm{rg}(\varphi) = 2$.

(4) On sait que $\mathrm{Im}(\varphi)$ est engendré parl'image d'une base de $\mathbf{R}^3$. En particulier $\mathrm{Im}(\varphi)$ est engendré par les vecteurs $u_1 = \varphi(e_1) = (-3, 8, -4)$, $u_2 = \varphi(e_2) =$

$(-1,3,-1)$ et $u_3 = \varphi(e_3) = (1,-2,2)$. De plus, on sait que $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = \mathrm{rg}(\varphi) = 2$, il suffit donc de trouver une famille libre à 2 vecteurs dans $\mathrm{Im}(\varphi)$. Par exemple, il est clair que $\{u_2, u_3\}$ est libre dans $\mathrm{Im}(\varphi)$ et donc (u_2, u_3) est une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.

(5) Il suffit de vérifier que la famille $\{(1,-2,1), u_2, u_3\}$ est libre. Soient $a, b, c \in \mathbf{R}$ tels que

$$\begin{aligned} a(1,-2,1) + bu_2 + cu_3 = 0_{\mathbf{R}^3} &\iff \begin{cases} a-b+c=0 \\ -2a+3b-2c=0 \\ a-b+2c=0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a-b+c=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases} \\ &\iff a=b=c=0 \end{aligned}$$

Ainsi, la famille $\{(1,-2,1), u_2, u_3\}$ est libre donc c'est une base de $\mathbf{R}^3$ obtenu en concaténant une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$ et une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ donc ces deux espaces sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.

Correction de l'Exercice 11.

(1) L'application φ est linéaire donc pour $(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4$, on a

$$\begin{aligned} \varphi(x,y,z,t) &= x\varphi(e_1) + y\varphi(e_2) + z\varphi(e_3) + t\varphi(e_4) \\ &= (x-y+2z+3t, x-y+2z+3t, -x+y, -x+y). \end{aligned}$$

(2) On sait que $\mathrm{Im}(\varphi)$ est engendré par les vecteurs $\varphi(e_1),\ \varphi(e_2),\ \varphi(e_3)$ et $\varphi(e_4)$. Or, on remarque que $\varphi(e_1) = -\varphi(e_2)$ et $3\varphi(e_3) = 2\varphi(e_4)$ donc $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(\varphi(e_1), \varphi(e_3))$. De plus, ces deux vecteurs sont non colinéaires donc $\{\varphi(e_1), \varphi(e_3)\}$ est libre et est donc une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.
Finalement on a $\mathrm{rg}(\varphi) = \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 2$.

(3) On a $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 2 < 4 = \dim(\mathbf{R}^4)$ donc $\mathrm{Im}(\varphi) \neq \mathbf{R}^4$ et φ n'est pas surjective.

(4) L'application φ est un endomorphisme donc elle est injective si et seulement si elle est surjective. Ainsi, φ n'est pas injective.

(5) D'après le théorème du rang, on a

$$\mathrm{rg}(\varphi) + \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \dim(\mathbf{R}^4) = 4.$$

Donc $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 4 - 2 = 2$.
A la question 2., on a remarqué que $\varphi(e_1) = -\varphi(e_2)$ et $3\varphi(e_3) = 2\varphi(e_4)$ donc $e_1 + e_2 \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ et $3e_3 - 2e_4 \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. De plus ces deux vecteurs sont non colinéaires donc forment une famille libre de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ (qui est de dimension 2), c'est donc une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

(6) On veut déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi) \cap \mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(e_1+e_2, 3e_3-2e_4) \cap \mathrm{Vect}(\varphi(e_1), \varphi(e_3))$.
Soit $u \in \mathbf{R}^4$, on a

$$u \in \mathrm{Ker}(\varphi) \cap \mathrm{Im}(\varphi) \iff \exists a,\ b,\ c,\ d \in \mathbf{R},\ u = a\varphi(e_1) + b\varphi(e_3) = c(e_1+e_2) + d(3e_3-2e_4).$$

Or

$$\begin{aligned} a\varphi(e_1) + b\varphi(e_3) = c(e_1+e_2) + d(3e_3-2e_4) &\iff \begin{cases} a+2b-c=0 \\ a+2b-c=0 \\ -a-3d=0 \\ -a+2d=0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a+2b-c=0 \\ a=-3d \\ a=2d \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a+2b-c=0 \\ a=0 \\ d=0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} c=2b \\ a=0 \\ d=0 \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement, on a $u \in \mathrm{Ker}(\varphi) \cap \mathrm{Im}(\varphi) \iff \exists b \in \mathbf{R},\ u = b\varphi(e_3)$. Autrement dit, $\mathrm{Ker}(\varphi) \cap \mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(\varphi(e_3)) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2)$.

Correction de l'Exercice 12.

- Montrons que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est stable par ψ.
  Soit $x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, on va montrer que $\psi(x) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.
  On a $\varphi(\psi(x)) = (\varphi \circ \psi)(x) = (\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x)) = \psi(0_E) = 0_E$ car φ et ψ commutent. Ainsi, on a montré que $\psi(x) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ et donc $\psi(\mathrm{Ker}(\varphi)) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$.
- Montrons que $\mathrm{Im}(\varphi)$ est stable par ψ.
  Soit $y \in \mathrm{Im}(\varphi)$, on va montrer que $\psi(y) \in \mathrm{Im}(\varphi)$.
  Par définition, il existe $x \in E$ tel que $y = \varphi(x)$. On a alors
  $\psi(y) = \psi(\varphi(x)) = (\psi \circ \varphi)(x) = (\varphi \circ \psi)(x) = \varphi(\psi(x)) \in \mathrm{Im}(\varphi)$.
  Ainsi, on a montré que $\psi(\mathrm{Im}(\varphi)) \subset \mathrm{Im}(\varphi)$.

Correction de l'Exercice 13.

Soit $(u_1, ..., u_n)$ une base de E. Par hypothèse, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, il existe un entier $p_i \geq 1$ tel que $\varphi^{[p_i]}(u_i) = 0_E$. Notons que s'il existe un entier strictement positif q et un vecteur $x \in E$ tel que $\varphi^{[q]}(x) = 0_E$, alors pour tout entier $r \geq q$, on a aussi $\varphi^{[r]}(x) = 0_E$. Posons alors $p = \max\limits_{1 \leq i \leq n} p_i$.

Pour tout $x = x_1 u_1 + ... + x_n u_n \in E$, puisque $\varphi^{[p]}$ est aussi linéaire, on a

$$\begin{aligned}\varphi^{[p]}(x) &= \varphi^{[p]}(x_1 u_1 + ... + x_n u_n)\\ &= x_1 \varphi^{[p]}(u_1) + ... + x_n \varphi^{[p]}(u_n)\\ &= 0_E + ... + 0_E \quad (\text{car } p \geq p_i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n)\\ &= 0_E\end{aligned}$$

Cela montre que l'application φ est nilpotente.
Ce résultat n'est pas vrai en dimension quelconque. En effet, si on considère $E = \boldsymbol{R}[X]$ et $\varphi : E \to E$ définie par $\varphi(P) = P'$ pour $P \in \boldsymbol{R}[X]$ alors si P est un polynôme de degré n, on a $\varphi^{[n+1]}(P) = 0$ mais il n'existe pas d'entier k tel que $\varphi^{[k]} = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$.

Correction de l'Exercice 14.

(1) Soit $i \in \{1, ..., n\}$, la famille $(e_i, \varphi(e_i))$ est liée par hypothèse et donc il existe $\alpha_i, \beta_i \in \mathbf{R}$ avec $(\alpha_i, \beta_i) \neq (0, 0)$ tels que $\alpha_i e_i + \beta_i \varphi(e_i) = 0$.
De plus, on a nécessairement $\beta_i \neq 0$. En effet si $\beta_i = 0$ alors $\alpha_i e_i = 0$ et donc $\alpha_i = 0$.
Ainsi, en posant $\lambda_i = -\dfrac{\alpha_i}{\beta_i}$, on a $\varphi(e_i) = \lambda_i e_i$.

(2) En utilisant le fait que la famille $x, \varphi(x)$ est liée et en raisonnant exactement de la même manière qu'à la question précédente, on montre qu'il existe $\lambda_x \in \mathbf{R}$ tel que $\varphi(x) = \lambda_x x$ où $x = e_1 + ... + e_n$.

(3) Par linéarité de φ, on a d'une part $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.
D'autre part, d'après la question précédente $\varphi(x) = \lambda_x x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_x e_i$.
Or, la famille $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E et la décomposition dans une base est unique donc pour $i \in \{1, ..., n\}$, on a $\lambda_x = \lambda_i$ et finalement, $\lambda_1 = ... = \lambda_n$. On note λ la valeur commune.
Enfin, pour $y \in E$, on peut écrire $y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i$ et par linéarité de φ, on a

$$\varphi(y) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \varphi(e_i) = \lambda \sum \mu_i e_i = \lambda y.$$

Donc on a montré que $\varphi = \lambda Id_E$.

Applications linéaires et matrices

Correction de l'Exercice 15.

(1) Il suffit de regarder la taille de chaque matrice. En effet, si $\varphi : E \to F$ est une application linéaire avec $\dim E = n$ et $\dim F = p$, alors $\mathrm{Mat}(\varphi) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{R})$. Ici, on a donc $\mathrm{Mat}(\varphi) = B$, $\mathrm{Mat}(\psi) = A$ et $\mathrm{Mat}(\theta) = C$.

(2) On a

— $\varphi(x, y)^T = B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ -y \end{pmatrix}$ d'où $\varphi(x, y, z) = (x + 2y, -y)$, pour tout vecteur $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

— $\psi(x, y)^T = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + y \\ 2y \\ x + y \end{pmatrix}$ d'où $\psi(x, y) = (-x + y, 2y, x + y)$, pour tout vecteur $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

— $\theta(x, y, z)^T = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 3y - z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}$ d'où $\theta(x, y, z) = (x + 3y - z, x - y + 2z)$, pour tout vecteur $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

(3) Il y a plusieurs manières de procéder pour vérifier si $\varphi \circ \psi$ est licite. On peut vérifier si les règles de composition s'appliquent, c'est à dire regarder si l'espace d'arrivée de ψ correspond à l'espace de départ pour φ. Une autre façon de faire consiste à vérifier si le produit matriciel de la matrice M représentative de φ et de celle N représentative de ψ est licite, c'est à dire si le nombre de colonnes de M est égal au nombre de lignes de N. Connaissant ces règles, on peut effectuer les compositions suivantes : $\varphi \circ \varphi$, $\varphi \circ \theta$, $\psi \circ \theta$ et $\theta \circ \psi$.

(4) — $\mathrm{Mat}(\varphi \circ \varphi) = B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

— $\mathrm{Mat}(\varphi \circ \theta) = B \times C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

— $\mathrm{Mat}(\psi \circ \theta) = A \times C = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

— $\mathrm{Mat}(\theta \circ \psi) = C \times A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Correction de l'Exercice 16.

(1) On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$. Les colonnes de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ sont donc données par les coordonnées de $\varphi(e_1)$ et $\varphi(e_2)$ dans la base (e_1, e_2).
On a $\varphi(e_1) = \varphi(1, 0) = (2, -3)$ et $\varphi(e_2) = \varphi(0, 1) = (-5, 4)$ donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

De la même manière, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2)
- On a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi+\psi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\psi) = \begin{pmatrix} 2 & -13 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.
  Ainsi, pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on a
  $((\varphi+\psi)(x,y))^T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi+\psi)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -13 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-13y \\ 4x+5y \end{pmatrix}$
  et donc $(\varphi+\psi)(x,y) = (2x-13y, 4x+5y)$.
- On a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi\circ\psi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\psi) = \begin{pmatrix} -35 & -21 \\ 28 & 28 \end{pmatrix}$.
  Ainsi, pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on a
  $((\varphi\circ\psi)(x,y))^T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi\circ\psi)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 & -21 \\ 28 & 28 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35x-21y \\ 28x+28y \end{pmatrix}$
  et donc $(\varphi\circ\psi)(x,y) = (-35x-21y, 28x+28y)$.
- On a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\psi\circ\varphi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\psi) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 24 & -32 \\ 11 & -31 \end{pmatrix}$.
  Ainsi, pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on a
  $((\psi\circ\varphi)(x,y))^T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\psi\circ\varphi)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & -32 \\ 11 & -31 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24x-32y \\ 11x-31y \end{pmatrix}$
  et donc $(\psi\circ\varphi)(x,y) = (24x-32y, 11x-31y)$.
- On a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi\circ\varphi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 19 & -30 \\ -18 & 31 \end{pmatrix}$.
  Ainsi, pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on a
  $((\varphi\circ\varphi)(x,y))^T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi\circ\varphi)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -30 \\ -18 & 31 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19x-30y \\ -18x+31y \end{pmatrix}$
  et donc $(\varphi\circ\varphi)(x,y) = (24x-32y, 11x-31y)$.

Correction de l'Exercice 17.

(1) On note $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\varphi)$. Les colonnes de A sont données par les coordonnées des $\varphi(e_i)$ dans la base $(u_1, ..., u_4)$. On a donc

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

(2) Soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, on a

$$(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(\varphi) \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} -x+2y+3z=0 \\ 3x+5z=0 \\ -2x-y+4z=0 \\ x+6z=0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -x+2y+3z=0 \\ 6y+14z=0 \\ -5y-2z=0 \\ 2y+9z=0 \end{cases} \iff x=y=z=0$$

Finalement, on a $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_{\mathbf{R}^3}\}$ et donc $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 0$.

(3) D'après le théorème du rang, on a $\dim(\mathbf{R}^3) = \dim \mathrm{Im}\,\varphi + \dim \mathrm{Ker}\,\varphi$.
On a alors $\dim \mathrm{Im}\,\varphi = \dim(\mathbf{R}^3) - \dim \mathrm{Ker}\,\varphi = 3 - 0 = 3$.

(4) On a montré que $\dim \mathrm{Im}\,\varphi = 3 \neq 4$ donc φ n'est pas surjective et $\dim \mathrm{Ker}\,\varphi = 0$ donc $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\}$ et φ est injective.

Correction de l'Exercice 18.

Soit $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'application linéaire donnée par $\varphi(x,y,z) = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On sait que les colonnes de la matrice A correspondent à $\varphi(e_1), \varphi(e_2)$ et $\varphi(e_3)$ où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
On remarque alors que $\varphi(e_2) = -\varphi(e_1)$ et $\varphi(e_3) = -2\varphi(e_1)$. Mais on sait que $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Vect}(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3))$ et donc $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Vect}(\varphi(e_1))$ et $\mathrm{rg}\,A = \mathrm{rg}\,\varphi = \dim(\mathrm{Im}\,\varphi) = 1$.
Le théorème du rang nous donne donc que $\dim(\mathrm{Ker}\,\varphi) = 3 - 1 = 2$. De plus, on a remarqué que $\varphi(e_2 + e_1) = 0 = \varphi(e_3 + 2e_1)$ et on observe que les vecteurs $e_2 + e_1$ et $e_3 + 2e_1$ sont non-colinéaires donc $(e_2 + e_1, e_3 + 2e_1)$ est une base de $\mathrm{Ker}\,A = \mathrm{Ker}\,\varphi$.

Correction de l'Exercice 19.

(1) On sait que A est la matrice de φ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Le nombre de colonnes de A est donc égal à la dimension de l'espace de départ de φ et donc $n = 4$. De même le nombre de lignes de A est égal à la dimension de l'espace d'arrivée de φ et donc $m = 3$.

(2) Par définition de la matrice de φ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, la première colonne de A donne les coordonées de $\varphi(e_1)$. On a donc $\varphi(e_1) = f_1 + 2f_2 + 3f_3$
Par linéarité de φ, on a $\varphi(e_1 + 2e_2) = \varphi(e_1) + 2\varphi(e_2)$. Or $\varphi(e_1)$ est donné par la première colonne de A donc $\varphi(e_1) = f_1 + 2f_2 + 3f_3$ et de la même manière $\varphi(e_2) = -f_2 + f_3$. On a ainsi $\varphi(e_1 + 2e_2) = f_1 + 5f_3$.

(3) Le rang de A est la dimension de l'espace vectoriel engendré pas ses colonnes. Ici, on a donc

$$\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right)) = 3.$$

Et ainsi, $\mathrm{rg}(\varphi) = \mathrm{rg}(A) = 3$.

(4) D'après le théorème du rang, on a $\dim(\mathbf{R}^3) = \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) + \mathrm{rg}(\varphi)$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 1$.

De plus, on sait que $\varphi(e_3) = (0,0,0)$ (3e colonne de A) et e_3 est un vecteur non nul donc (e_3) est une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

(5) D'après les questions précédentes, l'application φ est surjective ($\mathrm{rg}(\varphi) = 3$) mais pas injective.

Correction de l'Exercice 20.

(1) **(a)** On calcule l'image de chaque vecteur de la base canonique de $\mathbf{R}_3[X]$ et on l'exprime en fonction des vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$:

$$\begin{aligned}\varphi(1) &= 0 + 0X + 0X^2\\ \varphi(X) &= 1 + 0X + 0X^2\\ \varphi(X^2) &= 0 + 2X + 0X^2\\ \varphi(X^3) &= 0 + 0X + 3X^2\end{aligned}$$

D'où

$$A = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

(b) On a

— $\mathrm{Im}\,\varphi \subset \mathbf{R}_2[X]$

— $\mathrm{rg}(\varphi) = \mathrm{rg}(A) = \dim\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}\right) = 3.$

Donc $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathbf{R}_2[X]$ et φ est surjective.

(c) A n'est pas une matrice carrée donc l'application n'est pas bijective.

(d) $P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in \mathrm{Ker}\,\varphi \iff A\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} = 0 \iff a = b = c = 0$ et $d = d$. D'où $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathbf{R}_0[X]$.

(2) De même ici, on calcule l'image de chaque vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ et on l'exprime en fonction des vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$:

$$\begin{aligned}\psi(E_{1,1}) &= \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} = -E_{1,1} + E_{2,1}\\ \psi(E_{1,2}) &= \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = -E_{1,2} + E_{2,2}\\ \psi(E_{2,1}) &= \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = 2E_{1,1}\\ \psi(E_{2,2}) &= \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix} = 2E_{1,2}\end{aligned}$$

Appelons B la matrice de ψ dans cette base canonique. Alors,

$$B = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Endomorphismes particuliers

Correction de l'Exercice 21.

(1) pour $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, on a

$$\begin{aligned}(\varphi\circ\varphi)(x,y) &= \varphi\left(\frac{1}{3}(-x+2y, -2x+4y)\right)\\ &= \frac{1}{3}f\left(-x+2y, -2x+4y\right)\\ &= \frac{1}{9}(-(-x+2y) + 2(-2x+4y), -2(-x+2y) + 4(-2x+4y))\\ &= \frac{1}{9}(x - 2y - 4x + 8y, 2x - 4y - 8x + 16y)\\ &= \frac{1}{9}(-3x + 6y, -6x + 12y)\\ &= \frac{1}{3}(-x + 2y, -2x + 4y)\\ &= \varphi(x,y)\end{aligned}$$

On a donc montré que $\varphi\circ\varphi = \varphi$.

(2) • Commençons par déterminer le noyau de φ. Pour $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, on a

$$(x,y,)\in \mathrm{Ker}(\varphi) \iff \varphi(x,y)=(0,0) \iff \frac{1}{3}(-x+2y,-2x+4y)=(0,0)$$
$$\iff \begin{cases} -x+2y=0 \\ -2x+4y=0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x=2y \\ x=2y \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x={\color{blue}2}\times y \\ y={\color{blue}1}\times y \end{cases}$$
$$\iff (x,y)=y\times {\color{blue}(2,1)}$$

On a donc $\mathrm{Ker}(\varphi)=\{(x,y\in \mathbf{R}^2 \mid x=2y\}=\mathrm{Vect}(v_1)$ où on a posé $v_1=(2,1)$.

- On sait que $\mathrm{Im}(\varphi)=\mathrm{Vect}(\varphi(1,0),\varphi(0,1))$. Or $\varphi(1,0)=(-1,-2)$ et $\varphi(0,1)=2,4)$. On remarque que $\varphi(1,0)=-v_2$ et $\varphi(0,1)=2v_2$ où on a posé $v_2=(1,2)$ et donc $\mathrm{Im}(\varphi)=\mathrm{Vect}(v_2)$.
- Il est clair que v_1 et v_2 sont non colinéaires donc la famille (v_1,v_2) est libre et $\mathrm{Ker}(\varphi)\cap\mathrm{Im}(\varphi)=\{0_{\mathbf{R}^2}\}$. De plus, on a $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi))+\dim(\mathrm{Im}(\varphi))=1+1+2=\dim(\mathbf{R}^2)$ et donc $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^2$

(3) D'après la question précédente, (v_1,v_2) est une base de $\mathbf{R}^2$. On a $\varphi(v_1)=(0,0)$ car $v_1\in\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\varphi(v_2)=v_2$ car $v_2\in\mathrm{Im}(\varphi)$ et $\varphi\circ\varphi=\varphi$. Ainsi on obtient

$$\mathrm{Mat}_{(v_1,v_2)}(\varphi)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction de l'Exercice 22.

(1) On commence par trouver une famille génératrice de P :

$$(x,y,z)\in P \iff 2x+y-z=0 \iff \begin{cases} x=x\cdot{\color{blue}1}+y\cdot{\color{red}0} \\ y=x\cdot{\color{blue}0}+y\cdot{\color{red}1} \\ z=x\cdot{\color{blue}2}+y\cdot{\color{red}1} \end{cases}$$

Ainsi, en posant $u_1=(1,0,2)$ et $u_2=(0,1,1)$, on a que la famille $\{u_1,u_2\}$ est génératrice de P. Elle est clairement libre, donc (u_1,u_2) est une base de P.
De même,

$$(x,y,z)\in D \iff \begin{cases} x-y-z=0 \\ 2x-2y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=x\cdot{\color{red}1} \\ y=x\cdot{\color{red}1} \\ z=x\cdot{\color{red}0} \end{cases}$$

Ainsi, en posant $u_3=(1,1,0)$, on a que la famille $\{u_3\}$ est génératrice de D. Elle est clairement libre, donc (u_3) est une base de D.

(2) Montrons que P et D sont en somme directe :

$$(x,y,z)\in P\cap D \iff \begin{cases} x-y-z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ 2x-2y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x-y-z=0 \\ 3y+z=0 \\ 3z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

Ainsi, $P\cap D=\{0\}$. De plus, la question précédente montre que $\dim P+\dim D=2+1=\dim\mathbf{R}^3$. Ainsi, P et D sont bien supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$. Par conséquent, la concaténation d'une base de P et d'une base de D est aussi une base de $\mathbf{R}^3$ et (u_1,u_2,u_3) est une base de $\mathbf{R}^3$. *On aurait aussi pu directement répondre à la question en disant que (u_1,u_2,u_3), concaténation d'une base de P et d'une base de D, est aussi une base de $\mathbf{R}^3$ car libre avec 3 vecteurs. Cela montre immédiatement que P et D sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.*

(3) Soit (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Il s'agit d'exprimer $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$ et $\varphi(e_3)$ en fonction de e_1, e_2 et e_3. Par définition de φ, on sait que

$$\varphi(u_1)=\varphi(e_1+2e_3)=\varphi(e_1)+2\varphi(e_3)=e_1+2e_3$$
$$\varphi(u_2)=\varphi(e_2+e_3)=\varphi(e_2)+\varphi(e_3)=e_2+e_3$$
$$\varphi(u_3)=\varphi(e_1+e_2)=\varphi(e_1)+\varphi(e_2)=0$$

Cela conduit à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \varphi(e_1)+2\varphi(e_3)=e_1+2e_3 \\ \varphi(e_2)+\varphi(e_3)=e_2+e_3 \\ \varphi(e_1)+\varphi(e_2)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \varphi(e_1)+2\varphi(e_3)=e_1+2e_3 \\ \varphi(e_2)+\varphi(e_3)=e_2+e_3 \\ \varphi(e_2)-2\varphi(e_3)=-e_1-2e_3 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \varphi(e_1)+2\varphi(e_3)=e_1+2e_3 \\ \varphi(e_2)+\varphi(e_3)=e_2+e_3 \\ -3\varphi(e_3)=-e_1-e_2-3e_3 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \varphi(e_1)=\frac{e_1}{3}-\frac{2e_2}{3} \\ \varphi(e_2)=\frac{-e_1}{3}+\frac{2e_2}{3} \\ \varphi(e_3)=\frac{e_1}{3}+\frac{e_2}{3}+e_3 \end{cases}$$

D'où $A=\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ On a bien

$$A^2=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1+2+0 & -2-4+0 & 0+0+0 \\ -1-2+0 & 2+4+0 & 0+0+0 \\ 1-1+3 & -2+2+3 & 0+0+9 \end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}=A$$

Correction de l'Exercice 23.

(1) La matrice de φ dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbf{R}^3$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\varphi)=\begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 4 & 9 & 4 \\ -8 & -16 & -7 \end{pmatrix}.$$

Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\varphi\circ\varphi) = \left(\begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 4 & 9 & 4 \\ -8 & -16 & -7 \end{pmatrix}\right)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})$ et on a donc $\varphi\circ\varphi = \mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}$.

(2) Pour $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, on a

$$\begin{aligned}
(x, y, z) \in F \iff & \begin{cases} -2x - 4y - 2z = 0 \\ 4x + 8y + 4z = 0 \\ -8x - 16y - 8z = 0 \end{cases} \\
\iff & x + 2y + z = 0 \\
\iff & z = -x - 2y \\
\iff & (x, y, z) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -2)
\end{aligned}$$

On pose $u_1 = (1, 0, -1)$ et $u_2 = (0, 1, -2)$, on a montré que $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$. De plus, ces deux vecteurs étant non colinéaires, on a montré que (u_1, u_2) est une base de F.

De même, on montre que $G = \mathrm{Vect}(u_3)$ avec $u_3 = (1, -2, 4)$.

(3) Montrons que la famille $\{u_1,\ u_2,\ u_3\}$ est libre. Soient $a,\ b,\ c \in \mathbf{R}$ tels que

$$\begin{aligned}
au_1 + bu_2 + cu_3 = 0_{\mathbf{R}^3} \iff & \begin{cases} a + c = 0 \\ b - 2c = 0 \\ -a - 2b + 4c = 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} a + c = 0 \\ b - 2c = 0 \\ -2b + 5c = 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} a + c = 0 \\ b - 2c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \iff a = b = c = 0
\end{aligned}$$

Ainsi, la famille $\{u_1,\ u_2,\ u_3\}$ est une famille libre et donc une base de $\mathbf{R}^3$.

On a montré que la concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de $\mathbf{R}^3$, ceci signifie que F et G sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.

(4) On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminants

Le but est d'associer à chaque endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E, E)$ (avec $\dim E < +\infty$) un nombre réel qui vaut 0 si et seulement si f n'est pas bijective. Cette quantité est appelée le déterminant de f et ne dépend pas du choix de la base de E : on parle d'invariant de base. Un autre invariant de base bien connu est la trace de f, qui renvoie la somme des termes diagonaux de la matrice représentative de f dans une base quelconque de E.

Le déterminant peut aussi être utilisé pour vérifier si une famille de n vecteurs dans un espace E de dimension $n \geq 1$ est libre (et donc est une base de E) : on vérifie si la matrice formée par les vecteurs écrits en colonne a un déterminant non nul.

Correction de l'Exercice 24.

(1) **(a)** C'est une matrice 2×2 donc le déterminant se calcule immédiatement :

$$\det A = -3 \times (-7) - 4 \times 5 = 1$$

(b) En développant par rapport à la première colonne, on trouve

$$\begin{aligned}
\det B &= 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -1 - 1 \\
&= -2
\end{aligned}$$

(c) En appliquant la méthode du pivot de Gauss, on se ramène au calcul du déterminant d'une matrice triangulaire supérieure :

$$\begin{aligned}
\det C &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -9 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} \\
&= 1 \times 1 \times (-6) \\
&= -6
\end{aligned}$$

(d) De même ici, après application du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned}
\det D &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \\
&= 1 \times (-2) \times (-2) \times (-2) \\
&= -8
\end{aligned}$$

(e) On a $\det E = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

En développant par rapport à la première ligne, on trouve

$$\det E = (-1)\times\begin{vmatrix}5&4\\1&4\end{vmatrix} - (-1)\times\begin{vmatrix}2&4\\-2&4\end{vmatrix} + 0\times\begin{vmatrix}2&5\\-2&1\end{vmatrix}$$
$$= -(5\times 4 - 1\times 4) + (2\times 4 - (-2)\times 4) + 0$$
$$= -16+16$$
$\det E = 0$.

(f) On a $\det F = \begin{vmatrix}0&1&17&-5\\0&0&2&8\\0&0&0&-3\\1&11&3&-1\end{vmatrix}$.

En développant par rapport à la première colonne, on trouve
$$\det F = 0\times\begin{vmatrix}0&2&8\\0&0&-3\\11&3&-1\end{vmatrix} - 0\times\begin{vmatrix}1&17&-5\\0&0&-3\\11&3&-1\end{vmatrix} + 0\times\begin{vmatrix}1&17&-5\\0&2&8\\11&3&-1\end{vmatrix}$$
$$-1\times\begin{vmatrix}1&17&-5\\0&2&8\\0&0&-3\end{vmatrix}$$
$$\det F = -\begin{vmatrix}1&17&-5\\0&2&8\\0&0&-3\end{vmatrix}$$
Or ce déterminant étant échelonné, on a $\det F = -(1\times 2\times(-3)) = 6$.

(2) (a) En développant par rapport à la première colonne, on trouve
$$\det G = -a\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}$$
$$= -a$$
Ainsi, la matrice G est inversible si et seulement si $a \neq 0$.

(b) On a $\det H = \begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{vmatrix}$.

Si $a=b$ ou $a=c$ on a 2 lignes égales et donc $\det H = 0$. Sinon, un pivot de Gauss permet de se ramener à
$$\det H = \begin{vmatrix}1&a&a^2\\0&(b-a)&b^2-a^2\\0&0&(c-a)(c-b)\end{vmatrix} = (c-a)(b-a)(c-b).$$
On remarque de plus que cette formule est encore vraie si $a=b$ ou $a=c$.

Finalement, la matrice H est inversible si et seulement si $\det H \neq 0$ si et seulement si $a\neq c,\ a\neq b$ et $b \neq c$.

(c) On a $\det M_a = \begin{vmatrix}1&a&1\\a&1&1\\1&a&1\end{vmatrix}$.

On remarque que la première et la troisième lignes de ce déterminant sont égales donc $\det(M_a) = 0$

On sait que M_a est inversible si et seulement si $\det M_a \neq 0$ donc pour tout $a\in\mathbb{R}$, M_a n'est pas inversible.

(d) On a $\det N_a = \begin{vmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}$.

En développant par rapport à la première colonne, on trouve
$$\det N_a = 1\times\begin{vmatrix}a&1\\1&1\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1&a\\1&1\end{vmatrix} + a\times\begin{vmatrix}1&a\\a&1\end{vmatrix}$$
$$= (a-1)-(1-a)+a(1-a^2)$$
$$= (1-a)\,(-2+a(1+a))$$
$$= (1-a)(a^2+a-2)$$
$$\det N_a = (1-a)(a-1)(a+2)$$
.

Enfin, on a $\det N_a \neq 0$ si $a\neq 1$ et $a\neq -2$ et donc N_a est inversible pour tout $a\in\mathbb{R}\backslash\{-2,1\}$.

Correction de l'Exercice 25.

On cherche à calculer $\Delta(a,b,c) = \begin{vmatrix}1+a&a&a\\b&1+b&b\\c&c&1+c\end{vmatrix}$.

En remplaçant la ligne L_3 par $L_1+L_2+L_3$ (ce qui ne change pas le déterminant), on obtient
$$\Delta(a,b,c) = \begin{vmatrix}1+a&a&a\\b&1+b&b\\1+a+b+c&1+a+b+c&1+a+b+c\end{vmatrix}$$
$$= S_{a,b,c}\begin{vmatrix}1+a&a&a\\b&1+b&b\\1&1&1\end{vmatrix}.$$
Où on a posé $S_{a,b,c} = 1+a+b+c$.

Enfin, en remplaçant la dernière colonne par $C_3 - C_1$ puis en développant par rapport à la dernière colonne, on a
$$\Delta(a,b,c) = S_{a,b,c}\begin{vmatrix}1+a&a&-1\\b&1+b&0\\1&1&0\end{vmatrix}$$
$$= S_{a,b,c}\left((-1)\times\begin{vmatrix}b&1+b\\1&1\end{vmatrix} - 0\times\begin{vmatrix}1+a&a\\1&1\end{vmatrix} + 0\times\begin{vmatrix}1+a&a\\b&1+b\end{vmatrix}\right)$$
$$= S_{a,b,c}(-(b-(b+1)))$$
$$\Delta(a,b,c) = S_{a,b,c} = (1+a+b+c).$$

Correction de l'Exercice 26.

(1) On écrit les trois vecteurs en colonne et on calcule le déterminant de la matrice ainsi formée. En appliquant l'algorithme du pivot de Gauss, on trouve

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Ainsi, la famille (u_1, u_2, u_3) est libre avec $3 = \dim \mathbf{R}^3$ vecteurs, donc c'est une base de $\mathbf{R}^3$.

(2) On calcule les images des vecteurs u_1, u_2 et u_3 et on les exprime dans la nouvelle base. Notons que la matrice A a pour colonnes $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$ et $\varphi(e_3)$, avec (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

$$\begin{aligned} \varphi(u_1) &= \varphi(e_1 + e_3) = \varphi(e_1) + \varphi(e_3) = (1, 0, 1) = u_1 \\ \varphi(u_2) &= \varphi(-e_1 + e_2) = -\varphi(e_1) + \varphi(e_2) = (-1, 1, 0) = u_2 \\ \varphi(u_3) &= \varphi(e_1 + e_2 + e_3) = \varphi(e_1) + \varphi(e_2) + \varphi(e_3) = (2, 1, 2) = u_1 + u_3 \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Trouver des bases dans lesquelles la matrice de l'application linéaire est "simple" (ici, triangulaire supérieure ou même diagonale dans l'exercice 24) s'appelle la réduction des endomorphismes, et vous étudierez des méthodes systématiques de réduction au cours de votre cursus en mathématiques. Avoir des matrices "simples" constitue un avantage à la fois en terme de calculs et de stockage de l'information. En informatique, par exemple, il existe des algorithmes permettant de traiter efficacement les matrices dites "sparse", c'est-à-dire avec beaucoup de 0 (cf. module `scipy.sparse` en Python).

Extraits d'examens d'années précédentes

Correction de l'Exercice 27.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculons $\det M_\alpha = \begin{vmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

En développant par rapport à la troisième colonne, on obtient

$$\begin{aligned} \det M_\alpha &= \alpha \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \alpha(2-1) - (1 - (-3)) \\ \det M_\alpha &= \alpha - 4. \end{aligned}$$

(2) La matrice M_α est inversible si et seulement si $\det M_\alpha \neq 0$. Or

$$\det M_\alpha \neq 0 \iff \alpha - 4 \neq 0 \iff \alpha \neq 4.$$

Finalement, la matrice M_α est inversible si et seulement si $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{4\}$.

Correction de l'Exercice 28.

(1) On montre facilemet que la famille est libre. De plus, elle contient $3 = \dim \mathbf{R}^3$ vecteurs. Donc c'est une base de $\mathbf{R}^3$.

(2) $(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}) \iff (A + I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 2z \end{cases}$

On en déduit alors que $\mathrm{Ker}(f + id) = \{ \begin{pmatrix} 2z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \ ; \ z \in \mathbf{R}\}$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id})$ est de dimension 1 et une base est donnée par la famille contenant le seul vecteur $(2, 0, 1)$. Ainsi, le vecteur u_1 est dans $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id})$ donc $(f + \mathrm{id})(u_1) = f(u_1) + u_1 = 0 \iff f(u_1) = -u_1$.

(3) $f(u_2) = u_3$ et $f(u_3) = -u_2$.

(4) $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(5) En développant par rapport à la première colonne, on trouve $\det B = -1$. En particulier, on a $\det(f) = \det B \neq 0$ donc f est bijective.

Finalement, f est injective et donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbf{R}^3}\}$.

(6) La matrice de h dans la base (u_1, u_2, u_3) est celle de $f \circ f \circ f \circ f$, i.e. B^4. On montre par le calcul que $B^4 = I_3$, qui est la matrice de id dans la base (u_1, u_2, u_3). D'où $h = id$.

(7) A^4 est la matrice de $f \circ f \circ f \circ f$, qui est l'identité d'après la question précédente, dans la base canonique. D'où $A^4 = I_3$.

Correction de l'Exercice 29.

(1) En développant par rapport à la première colonne, on trouve

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \times \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 2 \times (2 \times 2 - 1 \times 1) + (-1 \times 2 - (-1) \times 1) + (-1 \times 1 - (-1) \times 2) \\
&= 6 - 1 + 1 \\
\Delta &= 6.
\end{aligned}
$$

(2) On remarque que Δ est le déterminant dans la base canonique de la famille de $3 = \dim \mathbb{R}^3$ vecteurs $\mathcal{F}$. Or, on a montré que $\Delta = 6 \neq 0$. Ainsi, la famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(3) On a $f(v_1) = (3, -3, 0) = v_1 - v_2$, $f(v_2) = (0, 0, 0)$ et $f(v_3) = (0, 0, 0)$. La matrice de f dans la base $\mathcal{F}$ est donc donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) On remarque que $\mathrm{Im}(f) \subset \{(a, b, 0) \in \mathbb{R}^3 | a, b \in \mathbb{R}\}$. En particulier, on a $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leq 2$ et donc f n'est pas surjective.

De plus, le théorème du rang nous donne $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathrm{Im}(f)) \geq 1$ et donc f n'est pas injective.

(5) On sait que l'image par f d'une base de $\mathbb{R}^3$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. On a donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(v_1), f(v_2), f(v_3)) = \mathrm{Vect}(f(v_1)) = \mathrm{Vect}(v_1 - v_2)$ d'après les calculs de la question 3.

Ainsi, $\mathrm{Im}(f)$ est un espace vectoriel de dimension 1 et de base $(v_1 - v_2)$.

(6) D'après le théorème du rang, on a $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathrm{Im}(f)) = 3 - 1 = 2$.

(De plus, une base de $\mathrm{Ker}(f)$ est donnée par (v_2, v_3).)