# Suites numériques

## Suites et limites

**Exercice 1.** ⧫ Soit $u$ la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 3$.

**(1)** Exprimer $u_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$. Calculer $u_4$.

**(2)** Mêmes questions si on suppose que la suite $u$ est géométrique.

Soit $v$ une suite arithmétique telle que $v_3 = 3$ et $v_6 = 24$.

**(3)** Calculer le premier terme $v_0$ et la raison de cette suite.

**(4)** Mêmes questions si on suppose que la suite $v$ est géométrique.

**Exercice 2.** On place un capital $w_0 = 1500$ euros à 4,5% par an et on note $w_n$ le capital obtenu au bout de $n$ années ($n \in \mathbb{N}$).

**(1)** Donner la nature de la suite $w$ et exprimer $w_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

**(2)** Calculer la valeur du capital au bout de 10 ans.

**(3)** Au bout de combien d'années le capital initial aura-t-il doublé ?

**Exercice 3.** ⧫ Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et soit $\ell$ un nombre réel. Écrire avec des quantificateurs les phrases suivantes.

**(1)** « La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée ».

**(2)** « La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $\ell$ ».

**(3)** « La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers $+\infty$ ».

**(4)** « La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge ».

**Exercice 4.** ⧫ Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites réelles définies de la manière suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$a_n = e^{-n}, \qquad b_n = \frac{n^2+3}{n^2+1}.$$

**(1)** Déterminer la limite $\ell$ de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**(2)** Pour tout $\varepsilon > 0$, donner un nombre entier $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$, alors $|a_n - \ell| < \varepsilon$.

**(3)** Mêmes questions avec la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Exercice 5.** ⧫ Déterminer, si elle existe, la limite de chacune des suites dont le terme général est donné ci-dessous :

$$a_n = \frac{2n^2-3n+1}{n^3+7}, \qquad b_n = \frac{n\cos(1/n)+1}{n-e^{-2n}}, \qquad c_n = \sqrt{4n+3} - \sqrt{4n-1},$$
$$d_n = \sqrt{2n+3} - \sqrt{4n-1}, \qquad e_n = \frac{n^2}{3^n}, \qquad f_n = \frac{(\ln(n))^5}{\sqrt{n}}.$$

**Exercice 6.** Comparer, si elles existent,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^n\right) \quad \text{et} \quad \lim_{m\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^n\right).$$

**Exercice 7.** ⧫ Soient $u$ et $v$ deux suites. Est-il vrai que :

**(1)** ($u$ et $v$ convergent) $\Longrightarrow$ ($u+v$ converge) ?

**(2)** ($u+v$ converge) $\Longrightarrow$ ($u$ et $v$ convergent) ?

**(3)** ($u+v$ et $u-v$ convergent) $\Longrightarrow$ ($u$ et $v$ convergent) ?

**Exercice 8.** ⧫ Donner un exemple dans chacune des situations suivantes :

**(1)** Une suite décroissante positive ne tendant pas vers 0.

**(2)** Une suite bornée non convergente.

**(3)** Une suite positive non bornée ne tendant pas vers $+\infty$.

**(4)** Une suite non monotone qui tend vers 0.

**(5)** Deux suites divergentes $u$ et $v$ telles que $uv$ soit convergente.

**Exercice 9.** ⧫ Fin 2020, un club de rugby comptait 7000 abonnés. À la fin de chaque année, le club constate que 20% des abonnés ne se réabonnent pas et que 4000 nouveaux abonnés arrivent. Le stade comporte 19000 places, et le club voudrait savoir s'il sera nécessaire de l'agrandir pour pouvoir accueillir tous les abonnés. On note $a_n$ le nombre d'abonnés à la fin de l'année $2020+n$.

**(1)** Préciser $a_0$ et expliquer pourquoi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{n+1} = 0{,}8\, a_n + 4000$. On va ensuite, par deux méthodes différentes, déterminer la limite de la suite $(a_n)_n$.

**(2)** Méthode 1 :

- **(a)** Pour $n \geq 0$, on pose $b_n = a_n - 20000$. Justifier que $(b_n)_n$ est une suite géométrique de raison 0,8.
- **(b)** Justifier que $(b_n)_n$ converge et donner sa limite.
- **(c)** Justifier que $(a_n)_n$ converge et donner sa limite.

**(3)** Méthode 2 :

**(a)** Démontrer que la suite $(a_n)_n$ est majorée par 20000 *(indication : faire un raisonnement par récurrence)*.

**(b)** Démontrer que la suite $(a_n)_n$ est croissante *(indication : calculer $a_1$ puis prouver par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{n+1} \geq a_n$)*.

**(c)** En déduire que la suite $(a_n)_n$ est convergente. Quelle est sa limite ?

**(4)** Le club devra-t-il agrandir son stade ?

**(5)** Si oui, quand la construction devra-t-elle être achevée ?

## Négligeabilité et équivalence

**Exercice 10.** ⧫ Classer les suites de termes généraux ci-dessous par ordre de « négligeabilité » :

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad b_n = \frac{1}{n^2}, \qquad c_n = \frac{\ln n}{n},$$
$$d_n = \frac{e^n}{n^3}, \qquad e_n = n, \qquad f_n = 1, \qquad g_n = \sqrt{ne^n}.$$

**Exercice 11.** Soit $\gamma > 0$. Le but de l'exercice est de prouver que

$$e^{\gamma n} = o(n!).$$

Pour cela, on pose, pour $n \geq 1$, $u_n = e^{\gamma n}$ et $v_n = n!$.

**(1)** Démontrer qu'il existe un nombre entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2} \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

**(2)** En déduire que, pour tout $n \geq n_0$, on a

$$\frac{u_n}{v_n} \leq \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}.$$

**(3)** Conclure.

**Exercice 12.** Quels sont les équivalents corrects parmi les propositions suivantes ?

**(1)** $n \sim n+1$ **(2)** $n^2 \sim n^2 + n$ **(3)** $\ln(n) \sim \ln(10^6 n)$
**(4)** $\exp(n) \sim \exp\left(n + 10^{-6}\right)$ **(5)** $\exp(n) \sim \exp(2n)$ **(6)** $\ln(n) \sim \ln(n+1)$.

**Exercice 13.** ⧫ Trouver un équivalent simple aux suites de terme général :

$$\alpha_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}, \qquad \beta_n = \frac{n^3 - \sqrt{1+n^2}}{\ln n - 2n^2},$$
$$\gamma_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}, \qquad \delta_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

**Exercice 14.** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que, pour tout $n \geq 0$, on a $v_n > 0$ et on suppose que $u_n \sim v_n$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive à partir d'un certain rang.

## Exemples de suites particulières

**Exercice 15.** ⧫ Soit $u$ la suite définie par $u_0 \in ]0, 4[$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2\sqrt{u_n}.$$

**(1)** Etudier les variations de la fonction $f\colon [0, 4] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2\sqrt{x}$ et de la fonction $g\colon [0, 4] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - x$.

**(2)** Montrer que la suite $u$ est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in ]0, 4[$.

**(3)** Montrer que la suite $u$ est monotone.

**(4)** Montrer que la suite $u$ converge et déterminer ses limites possibles.

**(5)** Déterminer la limite de la suite $u$.

**Exercice 16.** On note $f$ la fonction définie, pour tout $x \in [1, +\infty[$, par $f(x) = 1+\ln x$. Soit $u$ la suite définie par son premier terme $u_0 \geq 1$ et par la relation de récurrence, donnée pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_{n+1} = f(u_n)$.

**(1)** Montrer que la suite $u$ est bien définie et qu'elle est minorée par 1.

**(2)** En utilisant la monotonie de la fonction $f$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le signe de $u_{n+1} - u_n$ est le même que le signe de $u_n - u_{n-1}$.

**(3)** Quel est le signe de $u_1 - u_0$ ? (on pourra étudier la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$).

**(4)** En déduire que la suite $u$ converge et déterminer sa limite.

**Exercice 17.** ⧫ Soit $(u_n)_{n\geq1}$ la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

**(1)** Démontrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante.

**(2)** Démontrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

**(3)** Démontrer par récurrence sur $n$ que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.

**(4)** En déduire que la suite $(u_n)_n$ est convergente.

**Exercice 18.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

**(1)** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.

**(2)** En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$.

**(3)** Quelle est la nature de la suite $(H_n)_{n\geq1}$ ?

**Exercice 19.** On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des suites $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient la relation

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

**(1)** Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites.
**(2)** Montrer que l'application $\Phi : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\Phi(F) = (F_0, F_1)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
**(3)** En déduire que $\dim(\mathcal{E}) = 2$.
**(4)** Déterminer toutes les suites géométriques qui sont dans $\mathcal{E}$.
**(5)** À l'aide des questions précédentes, donner une base de $\mathcal{E}$.
**(6)** On considère la suite de Fibonacci, définie par

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad \text{et} \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Déterminer une expression du terme général de cette suite et sa limite.

**Exercice 20.** ⧫ Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ les deux suites définies respectivement par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

**(1)** Démontrer que $(u_n)_n$ est croissante.
**(2)** Démontrer que $(v_n)_n$ est décroissante.
**(3)** Démontrer que $(v_n - u_n)_n$ tend vers 0.
**(4)** Démontrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers la même limite. (On ne demande pas de déterminer cette limite.)

# Extraits d'examens des années précédentes

**Exercice 21** (Extrait de l'examen terminal 2020-2021)**.** Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ les deux suites définies pour $n \geq 1$ par :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n} + u_n.$$

**(1)** Calculer les premiers termes $u_1$, $u_2$ et $u_3$ ainsi que $v_1$, $v_2$ et $v_3$.
**(2)** Rappeler la définition de suites adjacentes.
**(3)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

On admettra que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante. La démonstration serait similaire à celle de la question précédente - il n'est pas demandé de la faire.

**(4)** À l'aide d'un résultat de cours, justifier que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont convergentes de même limite, notée $\ell$.
**(5)** Utiliser les questions précédentes pour montrer que $\ell \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

**Exercice 22** (Extrait de l'examen terminal 2021-2022)**.** Soit $a \in\, ]-2, 0[$. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{2} + 2u_n$.

Soit $p$ et $q$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = \dfrac{x^2}{2} + 2x$ et $q(x) = p(x) - x$.

**(1)** Étudier les variations de $p$ sur $\mathbb{R}$, et montrer que $p(]-2, 0[) = ]-2, 0[$.
**(2)** Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 0$, on a $u_n \in\, ]-2, 0[$.
**(3)** Montrer que pour tout $x \in\, ]-2, 0[$, on a $q(x) \leq 0$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est monotone.
**(4)** Justifier que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente, et déterminer sa limite $\ell$.

**Exercice 23** (Extrait de l'examen terminal 2022-2023)**.** Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \ln(1 + 2x)\exp(x)$ pour $x \in \left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

**(1)** Donner le développement limité de $f$ à l'ordre 3 en 0.
**(2)** En déduire un équivalent simple en 0 de la fonction $g$ définie par $g(x) = f(x) - 2\sin(x)$ pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

On considère la suite $u$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = f\left(\dfrac{1}{n^2}\right) - 2\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

**(3)** Déterminer un équivalent de la suite $u$.
**(4)** Donner, selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, la limite éventuelle de la suite $(n^\alpha u_n)_{n\geq 1}$. On justifiera soigneusement la réponse. *(On pourra éventuellement, pour obtenir une partie des points, traiter les cas $\alpha = 1$, $\alpha = 6$ et $\alpha = 8$.)*

**Exercice 24** (Extrait de l'examen terminal 2022-2023)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3 - \dfrac{6}{u_n + 4} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Soit $f\colon [1, 2] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 3 - \dfrac{6}{x+4}$.

**(1)** Démontrer que $f([1, 2]) \subset [1, 2]$.
**(2)** Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [1, 2]$.
**(3)** Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
**(4)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Soit $\ell$ la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**(5)** Démontrer que $\ell^2 + \ell - 6 = 0$ et en déduire $\ell$. Justifier la réponse avec soin.

# Suites et limites

**Correction de l'Exercice 1.**

**(1)** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_0 = 2$ donc pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 + n \times r = 2 + 3n$.
On calcule alors $u_4 = 2 + 4 \times 3 = 14$.

**(2)** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_0 = 2$ donc pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 \times r^n = 2 \times 3^n$.
On calcule alors $u_4 = 2 \times 3^4 = 162$.

**(3)** On note $r$ la raison de la suite arithmétique $v$, on a alors
$$\begin{cases} v_3 = 3 = v_0 + 3r \\ v_6 = 24 = v_0 + 6r \end{cases} \iff \begin{cases} v_6 - v_3 = 21 = 3r \\ v_6 - 2v_3 = 18 = -v_0 \end{cases} \iff \begin{cases} r = 7 \\ v_0 = -18 \end{cases}$$
Ainsi, la suite $v$ est la suite arithmétique de raison 7 et de premier terme $-18$.

**(4)** On note $r$ la raison de la suite arithmétique $v$, on a alors
$$\begin{cases} v_3 = 3 = v_0 \times r^3 \\ v_6 = 24 = v_0 \times r^6 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{v_3^2}{v_6} = \frac{9}{24} = v_0 \\ \frac{v_6}{v_3} = 8 = r^3 \end{cases} \iff \begin{cases} r = 2 \\ v_0 = \frac{3}{8} \end{cases}$$
Ainsi, la suite $v$ est la suite géométrique de raison 2 et de premier terme $\frac{3}{8}$.

**Correction de l'Exercice 2.**

**(1)** Chaque année, le capital est multiplié par $r = 1 + \frac{4.5}{100} = 1{,}045$. La suite $w$ est donc la suite géométrique de premier terme $w_0 = 1500$ et de raison $r = 1{,}045$ donc
$$w_n = 1500 \times (1{,}045)^n \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

**(2)** La valeur du capital au bout de 10 ans est $w_{10} = 1500 \times (1{,}045)^{10} \approx 2329$ euros.

**(3)** On cherche à résoudre
$$\begin{aligned} w_n \geq 2w_0 &\iff w_0 \times r^n \geq 2w_0 \\ &\iff r^n \geq 2 \\ &\iff e^{n\ln(r)} \geq 2 \\ &\iff n \geq \frac{\ln(2)}{\ln(r)} \approx 15{,}74. \end{aligned}$$
Le capital aura donc doublé au bout de 16 années.

**Correction de l'Exercice 3.**

**(1)** La phrase « La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée »s'écrit
$$\exists B \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq B.$$
La phrase « La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée »est la négation de la phrase précédente et elle s'écrit donc
$$\forall B \in \mathbb{R}_+,\ \exists n \in \mathbb{N},\ |a_n| > B.$$

**(2)** On rappelle que la phrase « la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel $\ell$ »s'écrit :
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \implies |a_n - \ell| < \varepsilon).$$
La phrase « la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers le réel $\ell$ »s'écrit donc :
$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \text{ et } |a_n - \ell| > \varepsilon).$$

**(3)** La phrase « la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ »s'écrit
$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \Longrightarrow u_n > A).$$
Ainsi, la phrase « la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers $+\infty$ »s'écrit
$$\exists A \in \mathbb{R},\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \text{ et } u_n \leq A).$$

**(4)** La phrase « la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge »peut être traduite par « pour tout $\ell$, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers le réel $\ell$ », elle s'écrit donc :
$$\forall \ell \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \text{ et } |a_n - \ell| > \varepsilon).$$

**Correction de l'Exercice 4.**

**(1)** On a immédiatement $a_n = e^{-n} = \dfrac{1}{e^n} \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$.
Pour l'autre,
$$\begin{aligned} b_n = \frac{n^2+3}{n^2+1} &= \frac{n^2\left(1+\frac{3}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\ &= \frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$

**(2)** Soit $\varepsilon > 0$ un réel :
$$\begin{aligned} |a_n - 0| < \varepsilon &\iff \left|e^{-n} - 0\right| < \varepsilon \\ &\iff e^{-n} < \varepsilon \\ &\iff n > -\ln\varepsilon \end{aligned}$$
Donc si on prend $N$ le maximum entre 0 et le plus petit entier supérieur à $-\ln\varepsilon$, cela convient.

**(3)** Soit $\varepsilon > 0$ un réel :
$$\begin{aligned} |b_n - 1| < \varepsilon &\iff \left|\frac{n^2+3}{n^2+1} - 1\right| < \varepsilon \\ &\iff \left|\frac{n^2+3}{n^2+1} - \frac{n^2+1}{n^2+1}\right| < \varepsilon \\ &\iff \left|\frac{2}{n^2+1}\right| < \varepsilon \\ &\iff \frac{2}{n^2+1} < \varepsilon \\ &\iff \varepsilon n^2 > 2 - \varepsilon \end{aligned}$$

Si $\varepsilon > 2$, alors $N = 2$ convient. Sinon, le plus petit entier $N$ supérieur à $\sqrt{\dfrac{2-\varepsilon}{\varepsilon}}$ fonctionne.

**Correction de l'Exercice 5.**

(a) Pour $n \geq 1$, on a

$$a_n = \frac{2n^2-3n+1}{n^3+7} = \frac{n^2}{n^3} \times \frac{2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{7}{n^3}} = \frac{1}{n} \times \frac{2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{7}{n^3}}.$$

Or, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{7}{n^3}} = 2$ et finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

(b) Pour $n \geq 1$, on a

$$b_n = \frac{n\cos\left(\frac{1}{n}\right)+1}{n-\mathrm{e}^{-2n}} = \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}}{1-\frac{\mathrm{e}^{-2n}}{n}}$$

Or, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-2n} = 0$. De plus, comme la fonction cos est continue en 0, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = \cos\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\right) = \cos(0) = 1.$$

Finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}}{1-\frac{\mathrm{e}^{-2n}}{n}} = 1$.

(c) On a, pour $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} c_n &= \sqrt{4n+3}-\sqrt{4n-1} \\ &= \frac{(\sqrt{4n+3}-\sqrt{4n-1})(\sqrt{4n+3}+\sqrt{4n-1})}{\sqrt{4n+3}+\sqrt{4n-1}} \\ &= \frac{(\sqrt{4n+3})^2-(\sqrt{4n-1})^2}{\sqrt{4n+3}+\sqrt{4n-1}} \\ &= \frac{4n+3-4n+1}{\sqrt{4n+3}+\sqrt{4n-1}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{4n+3}+\sqrt{4n-1}}. \end{aligned}$$

Or $\sqrt{4n+3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\sqrt{4n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$.

(d) Méthode 1

Pour $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} d_n &= \sqrt{2n+3}-\sqrt{4n-1} \\ &= \frac{(\sqrt{2n+3}-\sqrt{4n-1})(\sqrt{2n+3}+\sqrt{4n-1})}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{4n-1}} \\ &= \frac{(\sqrt{2n+3})^2-(\sqrt{4n-1})^2}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{4n-1}} \\ &= \frac{2n+3-4n+1}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{4n-1}} \\ &= \frac{4-2n}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{4n-1}} \\ &= \frac{n}{\sqrt{n}} \times \frac{\frac{4}{n}-2}{\sqrt{2+\frac{3}{n}}+\sqrt{4-\frac{1}{n}}} = \sqrt{n}\frac{\frac{4}{n}-2}{\sqrt{2+\frac{3}{n}}+\sqrt{4-\frac{1}{n}}}. \end{aligned}$$

Or $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue donc $\frac{\frac{4}{n}-2}{\sqrt{2+\frac{3}{n}}+\sqrt{4-\frac{1}{n}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{2}{2+\sqrt{2}}$ et finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = -\infty$.

Méthode 2

On va ici utiliser le développement limité en 0 de $\sqrt{1+x}$. Pour $n \geq 1$, on a $d_n = \sqrt{2n+3}-\sqrt{4n-1} = \sqrt{2n} \times \sqrt{1+\frac{3}{2n}} - \sqrt{4n} \times \sqrt{1-\frac{1}{4n}}$.

Or, au voisinage de 0, on a $\sqrt{1+x} = 1+\frac{x}{2}+o\,(x)$ et par substitution, on obtient pour $n$ au voisinage de $+\infty$

$\sqrt{1+\frac{3}{2n}} = 1+\frac{3}{4n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\sqrt{1-\frac{1}{4n}} = 1-\frac{1}{8n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Finalement,

$$\begin{aligned} d_n &= \sqrt{2n}+\frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{n}}-\sqrt{4n}+\frac{1}{4\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \sqrt{n}(\sqrt{2}-2)+\frac{3\sqrt{2}-1}{4\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned}.$$

Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = -\infty$.

(e) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$.

Pour $n \geq 2$, on a $\frac{n+1}{n} = 1+\frac{1}{n} \leq \frac{3}{2}$ donc pour $n \geq 2$, on a $e_{n+1} \leq \frac{3}{4}e_n$ et une récurrence immédiate assure que $0 \leq e_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n e_2$.

Or, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ et finalement, par théorème d'encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = 0$.

(f) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\ln(n) = 10\ln(n^{\frac{1}{10}})$. Or on sait que $\lim\limits_{m\to+\infty} \frac{\ln(m)}{m} = 0$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{1}{10}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{10\ln(n^{\frac{1}{10}})}{n^{\frac{1}{10}}} = 0.$$

Finalement, on observe que $f_n = \dfrac{(\ln(n))^5}{\sqrt{n}} = \left(\dfrac{\ln(n)}{n^{\frac{1}{10}}}\right)^5$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = 0$.

**Correction de l'Exercice 6.**

- Soit $n \geq 1$, on a
$$\lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^n = \left(\lim_{m\to+\infty} 1+\frac{1}{m}\right)^n = 1^n = 1.$$
Finalement, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lim\limits_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^n\right) = 1$
- Soit $m \geq 1$, on a
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^n = +\infty \text{ car on considère une suite géométrique de raison} > 1.$$
Finalement, on a $\lim\limits_{m\to+\infty}\left(\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^n\right) = +\infty$

**Correction de l'Exercice 7.**

**(1)** L'affirmation est vraie et on va par ailleurs montrer que si $u$ et $v$ convergent alors $u+v$ converge et
$$\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n + \lim_{n\to+\infty} v_n.$$
On suppose que la suite $u$ converge vers le réel $\ell$ et que $v$ converge vers $\ell'$.
Soit $\varepsilon > 0$, par hypothèse, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_1$, $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_2$, $|v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2}$. On pose $N = \max(N_1,N_2)$, soit $n \geq N$, on a
$$|u_n + v_n - (\ell+\ell')| = |u_n - \ell + v_n - \ell'| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| < \varepsilon.$$
On a donc montré que $u+v$ converge vers $\ell+\ell'$.

**(2)** Cette affirmation est fausse. En effet, si on considère les suites $u$ et $v$ définies pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ et $v_n = (-1)^{n+1}$, on a $(u+v)_n = 0$ donc la suite $u+v$ est convergente (car constante) mais on sait que $u$ et $v$ ne convergent pas.

**(3)** Cette affirmation est vraie. En effet, supposons que $u+v$ et $u-v$ convergent, alors d'après la question 1, les suites $2u = (u+v)+(u-v)$ et $2v = (u+v)-(u-v)$ sont convergentes donc les suites $u$ et $v$ le sont.

**Correction de l'Exercice 8.**

**(1)** La suite $a$ définie par $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

**(2)** La suite $b$ définie par $b_n = (-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

**(3)** La suite $c$ définie par $c_n = n(\cos(n)+1)$.

**(4)** La suite $d$ définie par $d_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

**(5)** Les suites $u$ et $v$ définies par $u_n = v_n = (-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

**Correction de l'Exercice 9.**

**(1)** Le terme $a_0$ est le nombre d'abonné à la fin de l'année $2020+0 = 2020$ donc d'après l'énoncé $a_0 = 7000$.
La perte de 20% d'abonnés correspond à une multiplication par 0,8 et on a chaque année 4000 abonnés supplémentaires donc
$$a_{n+1} = 0{,}8a_n + 4000$$

**(2)** (a) Pour $n \geq 0$, on a
$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_{n+1} - 20000 \\ &= 0{,}8a_n + 4000 - 20000 \\ &= 0{,}8a_n - 16000 \\ &= 0{,}8(a_n - 20000) \\ b_{n+1} &= 0{,}8b_n. \end{aligned}$$
On a donc montré que la suite $b_n$ est géométrique de raison 0,8 et de premier terme $b_0 = a_0 - 20000 = -13000$.

(b) On observe que $-1 < 0{,}8 < 1$ donc la suite géométrique de raison 0,8 a pour limite 0 et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$.

(c) On a pour $n \geq 0$, $a_n = b_n + 20000$ et donc
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n + 20000 = 20000.$$

**(3)** (*a*) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ : "$a_n \leq 20000$", on va montrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation :
On a $a_0 = 7000 \leq 20000$ donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité :
Soit $n \geq 0$, on suppose $P(n)$ vraie.
On a $a_{n+1} = 0{,}8a_n + 4000 \leq 0{,}8 \times 20000 + 4000 = 20000$ par hypothèse de récurrence.
Ainsi, on a $P(n+1)$ vraie.
Conclusion :
Finalement, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ : "$a_{n+1} - a_n \geq 0$", on va montrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation :

On a $a_1 - a_0 = 2600 \geq 0$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Soit $n \geq 0$, on suppose $P(n)$ vraie.

On a $a_{n+2} - a_{n+1} = 0{,}8a_{n+1} + 4000 - (0{,}8a_n + 4000) = 0{,}8(a_{n+1} - a_n) \geq 0$ par hypothèse de récurrence.

Ainsi, on a $P(n+1)$ vraie.

Conclusion :

Finalement, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) On a montré que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 20000, elle converge donc vers une limite notée $l$ et $l \leq 20000$.

En passant à la limite dans l'égalité $a_{n+1} = 0.8a_n + 4000$, on trouve que $l = 0.8l + 4000$ et donc $l = 20000$.

**(4)** On a prouvé que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 20000 > 19000$, en particulier, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $a_n > 19000$. Le club va donc devoir agrandir son stade.

**(5)** Pour déterminer l'année à partir de laquelle le stade est trop petit pour accueillir tous les abonnés, on peut utiliser un algorithme renvoyant le plus petit entier $n$ tel que $a_n > 19000$. En pseudo code, cela donne

```
Entrée  n =0
        a = 7000
tant que  a < 19000 :
        a= 0,8 a + 4000
        n = n+1
fin tant que
Sortie n
```

En Python, cela s'écrit

```
def rugby():
    a=7000
    n=0
    while (a<19000):
        a=0.8*a+4000
        n=n+1
    return n
```

Sinon, on peut déterminer cet entier $n$ comme suit

$$\begin{aligned}
a_n > 19000 &\iff b_n > -1000 \\
&\iff (0{,}8)^n \times (-13000) > -1000 \\
&\iff (0{,}8)^n < \frac{1}{13} \\
&\iff n\ln(0{,}8) < \ln(\frac{1}{13}) \\
&\iff n > \frac{\ln(\frac{1}{13})}{\ln(0{,}8)} \text{ car } \ln(0.8) < 0
\end{aligned}$$

On trouve donc que $a_n > 19000$ pour $n \geq 12$ et il faut que la construction du stade soit terminée avant 2032.

# Négligeabilité et équivalence

**Correction de l'Exercice 10.**

On a d'une part $b_n = o(a_n)$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{n} = 0$ et $a_n = o(c_n)$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{c_n} = \frac{1}{\ln(n)} = 0$.

D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$ donc $c_n = o(f_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = +\infty$ donc $f_n = o(e_n)$.

Enfin, on a $e_n = o(g_n)$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e_n}{g_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\exp(\frac{n}{2})} = 0$ et $g_n = o(d_n)$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{g_n}{d_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{7}{2}}}{\exp(\frac{n}{2})} = 0$.

Finalement, on a
$$b_n \ll a_n \ll c_n \ll f_n \ll e_n \ll g_n \ll d_n.$$

**Correction de l'Exercice 11.**

**(1)** Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = e^\gamma$ et $\dfrac{1}{2}\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{n+1}{2}$. Or, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2} = +\infty$ donc, par définition, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_0$, $e^\gamma \leq \frac{n+1}{2}$. C'est à dire
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}\frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

**(2)** D'après la question précédente, pour $n \geq n_0$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \dfrac{1}{2}\dfrac{u_n}{v_n}$, on va montrer le résultat voulu par récurrence sur $n \geq n_0$.

Initialisation : $n = n_0$

Clairement, $\dfrac{u_{n_0}}{v_{n_0}} \leq \dfrac{u_{n_0}}{v_{n_0}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n_0-n_0}$

Hérédité : Soit $n \geq n_0$, on suppose que $\dfrac{u_n}{v_n} \leq \dfrac{u_{n_0}}{v_{n_0}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-n_0}$

On a $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \dfrac{1}{2}\dfrac{u_n}{v_n} \leq \dfrac{u_{n_0}}{v_{n_0}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1-n_0}$

Conclusion :

$$\frac{u_n}{v_n} \leq \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}$$

pour $n \geq n_0$.

**(3)** Pour tout $n \geq n_0$, on a $0 \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}$. Or $-1 < \frac{1}{2} < 1$ et donc la suite géométrique $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}\right)_n$ converge vers 0.
Finalement, par théorème d'encadrement, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ et donc $e^{\gamma n} = o(n!)$.

**Correction de l'Exercice 12.**

**(1)** **Vrai** Pour $n \geq 1$, on a $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ et donc $n \sim n+1$.

**(2)** **Vrai** Pour $n \geq 1$, on a $\frac{n^2+n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n}$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+n}{n^2} = 1$ et donc $n^2 + n \sim n^2$.

**(3)** **Vrai** Pour $n \geq 1$, on a $\frac{\ln(10^6 n)}{\ln(n)} = \frac{\ln(10^6) + \ln(n)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(10^6)}{\ln(n)}$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(10^6 n)}{\ln(n)} = 1$ et donc $\ln(10^6 n) \sim \ln(n)$.

**(4)** **Faux** Pour $n \geq 0$, on a $\frac{\exp(10^{-6}+n)}{\exp(n)} = \frac{\exp(10^{-6})\exp(n)}{\exp(n)} = \exp(10^{-6})$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{\exp(10^{-6}+n)}{\exp(n)} = \exp(10^{-6}) \neq 1$ et $\exp(10^{-6}+n) \not\sim \exp(n)$.

**(5)** **Faux** Pour $n \geq 0$, on a $\frac{\exp(2n)}{\exp(n)} = \frac{\exp(n)^2}{\exp(n)} = \exp(n)$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{\exp(2n)}{\exp(n)} = +\infty$ et $\exp(2n) \not\sim \exp(n)$.

**(6)** **Vrai** Pour $n \geq 1$, on a $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n(1+\frac{1}{n}))}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)}$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1$ et on a $\ln(n+1) \sim \ln(n)$.

**Correction de l'Exercice 13.**

(a) Pour $n \geq 0$, on a
$\alpha_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = \frac{2}{n^2-1}$.
D'où $\frac{\alpha_n}{\frac{2}{n^2}} = \frac{n^2}{n^2-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$
Ainsi, on a $\alpha_n \sim \frac{2}{n^2}$.

(b) Pour $n \geq 1$, on a

$$\beta_n = \frac{n^3 - \sqrt{1+n^2}}{\ln n - 2n^2} = \frac{n^3}{n^2} \frac{1 - \frac{1}{n^2}\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}}{\frac{\ln(n)}{n^2} - 2} = n\frac{1 - \frac{1}{n^2}\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}}{\frac{\ln(n)}{n^2} - 2}.$$

Or, on observe que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1 - \frac{1}{n^2}\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}}{\frac{\ln(n)}{n^2} - 2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{\beta_n}{-\frac{n}{2}} = 1$ et $\beta_n \sim -\frac{n}{2}$.

(c) Pour $n \geq 1$, on a

$$\gamma_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}.$$

Or $\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$

On a alors $\gamma_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$.

(d) On sait que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$ et $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Ainsi, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{\delta_n}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} = 1$ et donc $\delta_n \sim \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$.

**Correction de l'Exercice 14.**

On a $u_n \sim v_n$ et $v_n > 0$ pour $n \geq 0$, donc on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$, on a $\left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| < \frac{1}{2}$.
Autrement dit, pour $n \geq N$, on a $-\frac{v_n}{2} < u_n - v_n < \frac{v_n}{2}$ et finalement

$$0 < \frac{v_n}{2} < u_n.$$

On a donc montré que pour $n \geq N$, on a $u_n > 0$

# Exemples de suites particulières

**Correction de l'Exercice 15.**

**(1)**
- Pour $x \in [0,4]$, on a $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$ et on a $f(0) = 0$ et $f(4)4$. On trouve donc le tableau de variations suivant

| $x$ | $0$ | | $4$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $4$ |

En particulier, la fonction $f$ est strictement croissante sur $[0,4]$ et vérifie $f(x) \in ]0,4[$ si $x \in ]0,4[$

- Pour $x \in [0,4]$, on a $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, on obtient donc le tableau de variations suivant

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |

**(2)** Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $P(n)$ : "$u_n$ est bien défini et $u_n \in ]0,4[$", on va montrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation :
Par définition $u_0 \in ]0,4[$ donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité :
Soit $n \geq 0$, on suppose $P(n)$ vraie.
Par hypothèse de récurrence, $u_n \in ]0,4[0$ et donc $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini.
De plus, par hypothèse de récurrence, $u_n \in ]0,4[$ donc, d'après la question précédente, on a $u_{n+1} \in ]0,4[$
Ainsi, on a $P(n+1)$ vraie.
Conclusion :
Finalement, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

**(3)** Soit $n \in \mathbf{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$. Or d'après la question 1., la fonction $g$ est strictement positive sur $]0,4[$ donc on a

$$u_{n+1} - u_n > 0, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Ainsi, la suite $u$ est (strictement) croissante.

**(4)** D'après les deux questions précédentes, la suite $u$ est croissante et majorée (par 4) donc elle converge vers une limite que l'on note $\ell$.
Pour $n \in \mathbf{N}$, on a $u_{n+1} = f(u_n)$ et la fonction $f$ est continue donc en passant à la limite, on trouve $\ell = f(\ell)$ c'est à dire $g(\ell) = 0$. D'après la question 1. , on a alors $\ell = 0$ ou $\ell = 4$.

**(5)** Par définition, on a $u_0 > 0$ et $u$ est croissante donc pour $n \geq 0$, on a $u_n \geq u_0$. Ainsi par passage à la limite dans les inégalités, on a $\ell \geq u_0 > 0$ donc en particulier, $\ell \neq 0$ et donc

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 4.$$

**Correction de l'Exercice 16.**

**(1)** Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $P(n)$ : "$u_n$ est bien défini et $u_n \geq 1$", on va montrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation :
Par définition $u_0 \geq 1$ donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité :
Soit $n \geq 0$, on suppose $P(n)$ vraie.
Par hypothèse de récurrence, $u_n \geq 1 > 0$ et donc $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini.
De plus, par hypothèse de récurrence, $u_n \geq 1$ on a donc
$\ln(u_n) \geq 0$ et $u_{n+1} = f(u_n) \geq 1$.
Ainsi, on a $P(n+1)$ vraie.
Conclusion :
Finalement, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

**(2)** La fonction $f$ est croissante donc pour $a,b \in [1,+\infty[$, les réels $a-b$ et $f(a)-f(b)$ ont même signe.
En particulier, pour $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1})$ et $u_n - u_{n-1}$ ont même signe.

**(3)** Pour $x \in [1,+\infty[$, on a $g'(x) = \frac{1}{x} - 1 \leq 0$ donc la fonction $g$ est décroissante sur $[1,+\infty[$. En particulier, pour $x \in [1,+\infty[$, on a $g(x) \leq g(1) = 0$.
Enfin, $u_1 - u_0 = g(u_0) \leq 0$.

**(4)** En utilisant les deux questions précédentes, on montre par une récurrence immédiate que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 1, elle converge donc vers une limite $\ell \geq 1$.
De plus, en passant à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, on a $g(\ell) = 0$. Or, on observe que $g'(x) < 0$ sur $]1,+\infty[$ donc la fonction $g$ est strictement décroissante et en particulier $g(x) < 0$ pour $x \in ]1,+\infty[$ donc $g(\ell) = 0 \iff \ell = 1$.
On a donc

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1.$$

**Correction de l'Exercice 17.**

**(1)** Pour $n \geq 1$, on a $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$. Ainsi, pour $n \geq 1$, on a $u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est (strictement) croissante.

**(2)** Soit $n \geq 1$, on a $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n(n+1)}$ or on sait que $0 < n(n+1) \leq (n+1)^2$ et donc en passant à l'inverse, on obtient $\dfrac{1}{(n+1)^2} \leq \dfrac{1}{n(n+1)}$ et finalement,

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

**(3)** Pour $n \geq 1$, on note $P(n)$ : "$u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$", on va montrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Initialisation :

Par définition $u_1 = 1 \leq 2 - \frac{1}{1} = 1$ donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité :

Soit $n \geq 1$, on suppose $P(n)$ vraie.

Par définition, $u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2}$. Ainsi, par hypothèse de récurrence

$u_{n+1} \leq 2 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \dfrac{1}{n} + \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) \leq 2 - \dfrac{1}{n+1}$ d'après la question précédente.

Ainsi, on a $P(n+1)$ vraie.

Conclusion :

Finalement, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**(4)** D'après la question précédente, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est majorée par 2 et elle est croissante d'après la question 1, ainsi la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente (et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n \leq 2$).

**Correction de l'Exercice 18.**

**(1)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $H_{2n} - H_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ or pour $k \in [\![n+1,2n]\!]$, on a $\dfrac{1}{k} \geq \dfrac{1}{2n}$.

Ainsi, $H_{2n} - H_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

**(2)** Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ : "$H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$", on va montrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation :

Par définition $H_{2^0} = H_1 = 1 \geq 1$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Soit $n \geq 0$, on suppose $P(n)$ vraie.

Par définition, $H_{2^{n+1}} = H_{2\times 2^n} \geq H_{2^n} + \dfrac{1}{2}$ d'après la question précédente.

Ainsi, par hypothèse de récurrence $H_{2^{n+1}} \geq \dfrac{1}{2} + \dfrac{n}{2} = \dfrac{n+1}{2}$.

Finalement, on a $P(n+1)$ vraie.

Conclusion :

Finalement, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**(3)** La suite $(H_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante. On a donc deux possibilités, soit la suite est convergente, soit elle diverge vers $+\infty$. D'après la question 2, la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ n'est pas bornée donc elle n'est pas convergente. Finalement

$$\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty.$$

**Correction de l'Exercice 19.**

**(1)** Montrons que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- La suite nulle est dans $\mathcal{E}$ donc $\mathcal{E}$ est non-vide.
- Soient $(F_n)_n$ et $(G_n)_n$ deux suites de $\mathcal{E}$, on considère $H$ la suite définie par $H_n = F_n + G_n$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $H_{n+2} = F_{n+2} + G_{n+2} = F_{n+1} + F_n + G_{n+1} + G_n = H_{n+1} + H_n$ donc $(H_n)_n \in \mathcal{E}$ et $\mathcal{E}$ est stable par addition.
- Soient $(F_n)_n \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\lambda F_{n+2} = \lambda(F_{n+1} + F_n) = \lambda F_{n+1} + \lambda F_n$ donc $(\lambda F_n)_n \in \mathcal{E}$ et $\mathcal{E}$ est stable par multiplication par un scalaire.

Finalement $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

**(2)**
- Vérifions que $\Phi$ est linéaire. Soient $F,G \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\Phi(F + \lambda G) = (F_0 + \lambda G_0, F_1 + \lambda G_1) = (F_0,F_1) + \lambda(G_0,G_1) = \Phi(F) + \lambda\Phi(G)$ donc $\Phi$ est linéaire.
- Soit $F \in \ker \Phi$, par définition de $\Phi$ on a $F_0 = F_1 = 0$ et puisque $F \in \mathcal{E}$, on a $F_2 = F_1 + F_0 = 0$. Finalement, une récurrence immédiate nous montre que pour $n \in \mathbb{N}$, on a $F_n = 0$ donc $\ker \Phi = \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\}$ et $\Phi$ est injective.
- Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, soit $F$ la suite définie par $F_0 = x$, $F_1 = y$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour $n \geq 0$. Par construction, on a $F \in \mathcal{E}$ et $\Phi(F) = (x,y)$. On a donc montré que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, il existe $F \in \mathcal{E}$ tel que $\Phi(F) = (x,y)$, autrement dit $\Phi$ est surjective.

Finalement on a montré que $\Phi$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

**(3)** On a montré que $\Phi : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ est un isomorphisme donc $\dim \mathcal{E} = \dim \mathbb{R}^2 = 2$.

**(4)** Soit $F$ une suite géométrique de raison $r$. On suppose que $F$ est non nulle, ainsi $r \neq 0$ et $F_0 \neq 0$. On a

$$\begin{aligned} F \in \mathcal{E} &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ F_0 r^{n+2} = F_0 r^{n+1} + F_0 r^n. \\ &\iff r^2 = r + 1 \end{aligned}$$

Cette équation admet deux solutions $r_+ = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $r_- = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

On a donc montré que les suites géométriques appartenant à $\mathcal{E}$ sont les suites géométriques de raison $r_+$ ou $r_-$.

**(5)** On note $R^+$ la suite de terme général $R_n^+ = r_+^n$ et $R^-$ la suite de terme général $R_n^- = r_-^n$. D'après la question précédente, les suites $R^+$ et $R^-$ sont dans $\mathcal{E}$. Montrons que la famille $(R^+,R^-)$ est libre.

Soit $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda R^+ + \mu R^- = 0$. En particulier

$$\begin{cases} \lambda R_0^+ + \mu R_0^- = 0 \\ \lambda R_1^+ + \mu R_1^- = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda r_+ + \mu r_- = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -\mu \\ \lambda(r_+ - r_-) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -\mu \\ \lambda\sqrt{5} = 0 \end{cases} \iff \lambda = \mu = 0.$$

Ainsi $(R^+,R^-)$ est une famille libre de $\mathcal{E}$ et puisque $\dim \mathcal{E} = 2$, c'est une base.

**(6)** La suite de Fibonacci est par définition un élément de $\mathcal{E}$ donc, d'après la question précédente il existe $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ tels que $F = \alpha R^+ + \beta R^-$. En particulier

$$\begin{cases} \alpha + \beta = F_0 = 0 \\ \alpha r_+ + \beta r_- = F_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = -\alpha \\ \alpha(r_+ - r_-) = \sqrt{5}\alpha = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \beta = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}.$$

Finalement, pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$F_n = \frac{r_+^n - r_-^n}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Enfin, on observe que $r_+ > 1$ et $-1 < r_- < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} F_n = +\infty$.

**Correction de l'Exercice 20.**

**(1)** Pour $n \geq 1$, on a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$ donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est (strictement) croissante.

**(2)** Pour $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \\ &= \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \\ &= \frac{2-(n+1)}{(n+1)!} \\ &= \frac{1-n}{(n+1)!} \leq 0 \end{aligned}.$$

Ainsi, la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

**(3)** Pour $n \geq 1$, on a $v_n - u_n = \frac{1}{n!}$ donc $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

**(4)** Les 3 questions précédentes nous disent précisément que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes, elles convergent donc vers la même limite.

# Extraits d'examens des années précédentes

**Correction de l'Exercice 21.**

**(1)** On calcule $u_1 = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{7}{12}$ et $u_3 = \dfrac{37}{60}$.

De même, $v_1 = \dfrac{3}{2}$, $v_2 = \dfrac{13}{12}$ et $v_3 = \dfrac{57}{60}$.

**(2)** Deux suites $a$ et $b$ sont dites adjacentes si :

(i) L'une des deux est croissante,
(ii) l'autre est décroissante,
(iii) la suite $a - b$ tend vers 0.

**(3)** Pour $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0 \end{aligned}.$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (strictement) croissante.

**(4)** Pour $n \geq 1$, on a $v_n - u_n = \frac{1}{n}$ donc $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$. Ainsi, d'après la question précédente, les suites $u$ et $v$ sont adjacentes et donc elles convergent vers une même limite $\ell$.

**(5)** La suite $u$ converge vers $\ell$ et est croissante donc $\ell \geq u_1 = \frac{1}{2}$. De même, la suite $v$ converge vers $\ell$ et est décroissante donc $\ell \leq v_3 \leq 1$. Ainsi, on a $\ell \in [\frac{1}{2},1]$.

**Correction de l'Exercice 22.**

**(1)** La courbe représentative de $p$ est une parabole convexe s'annulant en $-4$ et $0$. $p$ est donc une application décroissante sur $]-\infty,-2]$ et croissante sur $]-2,+\infty[$, donc croissante sur $]-2,0[$. $p(-2)=-2$ et $p(0)=0$ donc $p(]-2,0[)=]-2,0[$.

**(2)** **Initialisation :** $u_0=a\in]-2,0[$, d'après l'énoncé.
**Hérédité :** On suppose que $u_n\in]-2,0[$. Alors, $u_{n+1}=p(u_n)\in]-2,0[$, puisque l'intervalle $]-2,0[$ est stable par $p$.
**Conclusion :** $\forall n\in\mathbf{N},\quad u_n\in]-2,0[$.

**(3)** La courbe représentative de $q$ est une parabole convexe s'annulant en $-2$ et $0$. $p$ est donc une application négative sur $]-2,0[$. Ainsi, pour tout $n\in\mathbf{N}$, on a $u_{n+1}-u_n=p(u_n)-u_n=q(u_n)\leq 0$, puisque tous les termes de la suite sont compris entre $-2$ et $0$. Donc $(u_n)$ est décroissante.

**(4)** La suite est décroissante et minorée donc converge. Puisque $p$ est continue, la limite est solution de l'équation $\ell=p(\ell)\iff\ell=0$ ou $\ell=-2$. Puisque $u_0<0$ et que la suite est décroissante, alors $\ell=-2$.

**Correction de l'Exercice 23.**

**(1)** On se place au voisinage de 0. D'après le cours et par substitution :

$$\ln(1+2x)=2x-2x^2+\frac{8x^3}{3}+o(x^3)$$

De plus,

$$\exp(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

Par produit et en éliminant les termes d'ordre supérieur ou égal à 4, qui sont négligeables devant $x^3$ au voisinage de 0, on obtient finalement :

$$f(x)=2x+\frac{5x^3}{3}+o(x^3)$$

**(2)** Au voisinage de 0, en multipliant le $\mathrm{DL}_3(0)$ usuel de sinus par $-2$ :

$$-2\sin(x)=-2x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

Ainsi, toujours au voisinage de 0, en sommant les DL :

$$f(x)-2\sin(x)=2x^3+o(x^3)$$

On en déduit que $f(x)-2\sin(x)\sim 2x^3$ quand $x\to 0$.

**(3)** Quand $n\to+\infty$, $1/n^2\to 0$. On peut donc appliquer le résultat de la question précédente en remplaçant $x$ par $1/n^2$ :

$$u_n=f\left(\frac{1}{n^2}\right)-2\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\sim\frac{2}{n^6}$$

**(4)** Par produit, $n^\alpha u_n\sim 2n^{\alpha-6}$. Ainsi :

- si $\alpha<6$, alors $u_n\to 0$ ;
- si $\alpha=6$, alors $u_n\to 2$ ;
- si $\alpha>6$, alors $u_n\to+\infty$.

**Correction de l'Exercice 24.**

**(1)** La fonction $f$ est croissante sur l'intervalle $[1,2]$, on a donc $f([1,2])=[f(1),f(2)]=[\frac{9}{5},2]$. En particulier, on a $f([1,2])\subset[1,2]$.

**(2)** Pour $n\in\mathbb{N}$, on note $P(n)$ : "$u_n\in[1,2]$", on va montrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.
Initialisation :
Par définition $u_0=1\in[1,2]$ donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité :
Soit $n\geq 0$, on suppose $P(n)$ vraie.
On a d'une part $u_{n+1}=f(u_n)$ or $u_n\in[1,2]$ par hypothèse de récurrence et donc, d'après la question précédente, on a $u_{n+1}\in[1,2]$
Ainsi, on a $P(n+1)$ vraie.
Conclusion :
Finalement, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

**(3)** On pose $g:[1,2]\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x)=f(x)-x=3-x-\frac{6}{x+4}$.
La fonction $g$ est dérivable et pour $x\in[1,2]$, on a $g'(x)=-1+\frac{6}{(x+4)^2}$. On remarque que pour $x\in[1,2]$, $g'(x)\leq 0$ donc $g$ est décroissante et pour $x\in[1,2]$, on a $g(x)\geq g(2)=0$.
Or, pour $n\in\mathbb{N}$, on a $u_{n+1}-u_n=g(u_n)$ et d'après la question précédente $u_n\in[1,2]$. On a donc

$$u_{n+1}-u_n=g(u_n)\geq 0,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

**(4)** D'après les questions précédentes, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, elle est donc convergente.

**(5)** Par définition, on a $u_{n+1}=f(u_n)$ pour $n\in\mathbb{N}$. La fonction $f$ étant continue, on peut passer à la limite dans cette égalité et on trouve $\ell=f(\ell)$.
Or $\ell=f(\ell)\iff\ell-3+\frac{6}{\ell+4}=0\iff\ell^2+\ell-6=0$.
Les solutions de cette équation sont $\ell=2$ et $\ell=-3$. Or, on sait que $u_n\in[1,2],\forall n\in\mathbb{N}$ donc $\ell\in[1,2]$ et nécessairement $\ell=2$.