

# Contrôle continu de TD numéro 2

Mathématiques S2 - 25 mars 2022 - Groupe CM2

V. Souveton

On se place dans l'espace vectoriel  $E := \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  des fonctions de la variable réelle à valeurs dans l'ensemble des réels, muni de la somme et du produit externe usuels. On considère :

- $P := \{f \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \mid \forall x \in \mathbf{R}, f(-x) = f(x)\}$ , l'ensemble des fonctions paires;
- $I := \{f \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \mid \forall x \in \mathbf{R}, f(-x) = -f(x)\}$ , l'ensemble des fonctions impaires.

1. Donner trois exemples de fonctions paires et trois exemples de fonctions impaires. (/3)
2. Montrer que  $P$  et  $I$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ . (/5)
3. Montrer que  $P$  et  $I$  sont en somme directe. (/2)
4. Pour tout  $f \in E$ , on considère la fonction  $p_f$  définie pour tout réel  $x$  par  $p_f(x) = f(x) + f(-x)$  et la fonction  $i_f$  définie pour tout réel  $x$  par  $i_f(x) = f(x) - f(-x)$ .
  - a) Montrer que pour tout  $f \in E$ , la fonction  $p_f$  est paire. (/1,5)
  - b) Montrer que pour tout  $f \in E$ , la fonction  $i_f$  est impaire. (/1,5)
  - c) En déduire que  $P$  et  $I$  sont supplémentaires dans  $E$ . (/2)

*FIN*