Contrôle continu de TD numéro 3

Mathématiques S2 - 14 avril 2022

V. Souveton

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$ muni de la somme et du produit externe usuels. On appelle e_1, e_2 et e_3 les 3 vecteurs de la base canonique (e_i est le vecteur dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la i-ème, qui vaut 1). On considère l'endomorphisme $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ défini par :

$$f(x, y, z) = (3x + y, 0, x + y + z)$$

1. Montrer que f est linéaire. **(/1)**
2. Écrire la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Calculer le déterminant de cette matrice ; cette matrice est-elle inversible ? **(/2)**
3. Déterminer le noyau de f, en donner une base et préciser sa dimension. **(/2)**
4. Rappeler le théorème du rang dans le cas général. Ici, combien vaut la dimension de $\mathrm{Im}\, f$? **(/1,5)**
5. Donner une base de $\mathrm{Im}\, f$. **(/1)**
6. L'application f est-elle bijective ? Injective ? Surjective ? **(/0,5)**
7. On pose $u_1 := (0, 0, 1)$, $u_2 := (2, 0, 1)$ et $u_3 := (1, -3, 2)$.
   a) Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbf{R}^3$. **(/0,5)**
   b) Écrire la matrice N de f dans la base (u_1, u_2, u_3). **(/1,5)**

$\mathcal{FIN}$