Université Clermont Auvergne
UFR de Mathématiques

L1 mathématiques
Année 2020-2021

U.E. L1 MAAS, portails "Avec Maths" (code Z120BU03TA)

Tous portails "AVEC MATHS" , le 11 mai 2021, 13h30–15h

Rédacteur du sujet : Équipe pédagogique MAAS Nb. de pages : 2	Durée de l'épreuve : 1h30. Feuilles de synthèse TCM S1 & MAAS S2 et calculatrices autorisées. Les réponses doivent être justifiées ; La rédaction sera prise en compte dans l'évaluation de la copie.

Exercice 1 [5 points]

On considère la fonction définie, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $xy \neq 0$, par

$$f(x, y) = \frac{x^2 + xy - y}{xy}.$$

1. Calculer les dérivées partielles de f.
2. Calculer le vecteur gradient $\overrightarrow{grad}(f)(1, 1)$.
3. (a) Donner la valeur a telle que le point $(1, 1)$ appartient à la ligne de niveau a noté L_a.
   (b) Donner l'équation de L_a et représenter avec soin la ligne de niveau L_a ainsi qu'un représentant $\overrightarrow{grad}(f)(1, 1)$ dont l'origine du vecteur sera placée en le point $(1, 1)$.
   (c) Soit a la valeur de la question précédente. Donner l'équation de la tangente à la ligne L_a au point $(1, 1)$.

Exercice 2[6 points]

Les questions 1&2 de cet exercice sont indépendantes et peuvent donc être traitées dans n'importe quel ordre.

1. Un élément radioactif se désintègre avec une vitesse proportionnelle à sa masse. L'évolution de sa masse $M(t)$ au cours du temps, ici exprimé en années, est donc modélisée par l'équation différentielle

   $$M'(t) + aM(t) = 0 \tag{1}$$

   où a est une constante qui dépend de l'élément considéré.

   (a) Donner toutes les solutions de l'équation différentielle (1).

   (b) On désigne par $M_0 = M(0)$ la masse d'uranium 238 sur la Terre au moment de la formation de notre planète, il y a 4,5 milliards d'années. On désigne par M_p la masse d'uranium 238 sur la Terre au temps présent. La constante a pour l'uranium 238 est égale à

   $$\frac{\ln(2)}{4,5 \times 10^9}.$$

   Calculer le rapport

   $$\frac{M_p}{M_0}.$$

2. Résoudre les deux équations différentielles suivantes :

   (a) $y' + 4y = e^{-x} + e^{x}$ avec la condition initiale $y(0) = 1$

   (b) $y'' + 4y' + 5y = 0$ avec les conditions initiales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Exercice 3[9 points]

1. P, Q et R désignent trois propositions. Avec une table de vérité, montrer que $((P \text{ ou } Q) \Rightarrow R)$ est équivalent à $((P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R))$.
2. On considère l'assertion P

$$(P) \qquad \forall a \in \mathbb{N}, \exists b \in \mathbb{N}, \exists c \in \mathbb{N}, a = bc$$

   Écrire la négation de l'assertion P puis dire en le justifiant si P est vraie ou fausse.
3. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

4. L'effectif d'un club de football est constitué de 20 joueurs : 3 gardiens de but, 6 défenseurs, 7 milieux de terrain et 4 attaquants. L'entraineur doit constituer une équipe de 11 joueurs, choisis parmi les joueurs de l'effectif, et formée de 1 gardien de but, 4 défenseurs, 4 milieux de terrains et 2 attaquants. Combien y-a-t-il d'équipes possibles ?
5. Soit $E = \{a, b, c, d\}$ un ensemble à quatre éléments. Combien de sous-ensembles de E peut-on constituer ? (Un sous-ensemble peut contenir de 0 à 4 éléments).
6. Soit A et B deux ensembles.
   (a) Montrer que si $A \subset B$ alors $A \cup B = B$. La réciproque est-elle vraie ?
   (b) Démontrer que $A = B$ équivaut à $A \cap B = A \cup B$.

Correction de l'examen du 11/05/21

Proposée par Sue Claret, Léo Hahn Lecler, Clément Legrand, Vincent Souveton et Emilien Zabeth

Correction de l'Exercice 1.

1. Les dérivées partielles de f sont données par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{y^2}.$$

2. $\overrightarrow{grad}(f)(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3. (a) On cherche $a \in \mathbb{R}$ tel que $(1,1) \in L_a$. On a

$$\begin{aligned}(1,1) \in L_a &\iff f(1,1) = a \\ &\iff 1 = a\end{aligned}$$

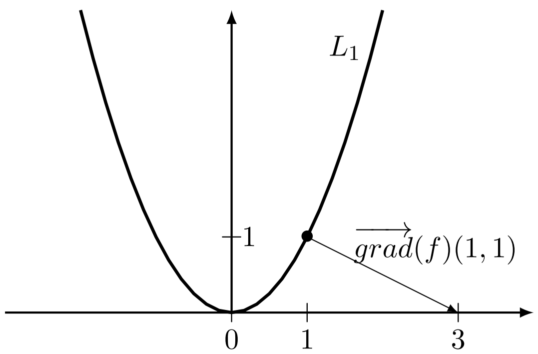
Donc $a = 1$.

(b) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $xy \neq 0$ on a

$$\begin{aligned}(x,y) \in L_1 &\iff f(x,y) = 1 \\ &\iff \frac{x^2 + xy - y}{xy} = 1 \\ &\iff x^2 + xy - y = xy \\ &\iff x^2 = y.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$L_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0,\ y = x^2\} = \{(x,x^2) \mid x \in \mathbb{R}^*\}.$$



(c) L'équation de la tangente à la ligne L_1 au point $(1,1)$ est donnée par

$$\begin{aligned}&(x-1)\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) + (y-1)\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 0 \\ \iff &2x - y - 1 = 0.\end{aligned}$$

Correction de l'Exercice 2.

1. (a) Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme

$$t \mapsto Ke^{-at},$$

où $K \in \mathbb{R}$ est une constante.

(b) On pose $T = 4,5 \times 10^9$. Par l'énoncé on sait que $M_p = M(T)$. Comme M satisfait l'équation différentielle (1), on sait par la première question qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $M(t) = Ke^{-at}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ainsi on a

$$\frac{M_p}{M_0} = \frac{M(T)}{M(0)} = \frac{Ke^{-aT}}{Ke^{-a\times 0}} = \frac{Ke^{-aT}}{K} = e^{-aT}.$$

D'autre part, on a:

$$aT = \frac{\ln(2)}{4,5 \times 10^9} \times (4,5 \times 10^9) = \ln(2).$$

Ainsi $e^{-aT} = e^{-\ln(2)} = \frac{1}{e^{\ln(2)}} = \frac{1}{2}$. D'où $\frac{M_p}{M_0} = \frac{1}{2}$.

2. (a) Avant de donner la solution vérifiant la condition initiale, on commence par donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle. On commence par résoudre l'équation homogène associée $y' + 4y = 0$, pour laquelle les solutions sont de la forme $x \mapsto Ke^{-4x}$, où $K \in \mathbb{R}$ est une constante. Il faut ensuite trouver une solution particulière. Pour cela, on peut utiliser la méthode de variation de la constante: on cherche une solution de la forme $y_p : x \mapsto g(x)e^{-4x}$, où g est une fonction à déterminer. On a $y_p'(x) = g'(x)e^{-4x} - 4g(x)e^{-4x}$, donc

$$\begin{aligned} y_p'(x) + 4y_p(x) &= g'(x)e^{-4x} - 4g(x)e^{-4x} + 4y_p(x) \\ &= g'(x)e^{-4x} - 4g(x)e^{-4x} + 4g(x)e^{-4x} = g'(x)e^{-4x}. \end{aligned}$$

On en déduit donc que y_p est solution de l'équation différentielle si et seulement si $g'(x)e^{-4x} = e^x + e^{-x}$, ou autrement dit $g'(x) = e^{4x}(e^x + e^{-x})$. Il suffit donc que g soit une primitive de

$$e^{4x}(e^x + e^{-x}) = e^{5x} + e^{3x}.$$

On peut ainsi poser $g : x \mapsto \frac{1}{5}e^{5x} + \frac{1}{3}e^{3x}$.
Les solutions de l'équation différentielle sont donc de la forme

$$x \mapsto Ke^{-4x} + (\frac{1}{5}e^{5x} + \frac{1}{3}e^{3x})e^{-4x},$$

où $K \in \mathbb{R}$ est une constante.
Soit y la solution de l'équation différentielle vérifiant $y(0) = 1$. On sait qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = Ke^{-4x} + (\frac{1}{5}e^{5x} + \frac{1}{3}e^{3x})e^{-4x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Ainsi

$$y(0) = 1 \iff Ke^0 + (\frac{1}{5}e^0 + \frac{1}{3}e^0)e^0 = 1 \iff K + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = 1 \iff K = \frac{7}{15}.$$

Finalement $y(x) = \frac{7}{15}e^{-4x} + (\frac{1}{5}e^{5x} + \frac{1}{3}e^{3x})e^{-4x} \ \forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Comme précédemment, on commence par résoudre l'équation différentielle avant de donner la solution particulière. L'équation caractéristique associée est $X^2 + 4X + 5 = 0$. Le discriminant est $\Delta = -4$, donc les solutions de l'équation caractéristique sont

$$\lambda_1 = 2 + i,\ \lambda_2 = 2 - i.$$

Ainsi, les solutions de l'équation différentielle sont de la forme

$$x \mapsto (K_1\cos(x) + K_2\sin(x))e^{2x},$$

où $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ sont des constantes.
Soit y une solution de l'équation différentielle vérifiant $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$. Comme y est solution de l'équation, on sait par ce qui précède qu'il existe $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ tels que $y(x) = (K_1 \cos(x) + K_2 \sin(x))e^{2x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi

$$y(0) = 1 \Longleftrightarrow (K_1 \cos(0) + K_2 \sin(0))e^0 = 1 \Longleftrightarrow K_1 = 1.$$

D'autre part un simple calcul de dérivée montre que

$$y'(x) = ((K_2 + 2K_1)\cos(x) + (2K_2 - K_1)\sin(x))e^{2x},$$

d'où

$$y'(0) = ((K_2 + 2K_1)\cos(0) + (2K_2 - K_1)\sin(0))e^0 = K_2 + 2K_1 = K_2 + 2$$

(pour la dernière égalité on utilise le fait que $K_1 = 1$). Finalement la condition $y'(0) = 0$ implique que $K_2 + 2 = 0$, donc que $K_2 = -2$. Ainsi

$$y(x) = (\cos(x) - 2\sin(x))e^{2x} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'Exercice 3.

1. La table de vérité est donnée ci dessous :

P	Q	R	P ou Q	(P ou Q) $\implies$ R	P $\implies$ R	Q $\implies$ R	(P $\implies$ R) et (Q $\implies$ R)
V	V	V	V	**V**	V	V	**V**
V	V	F	V	**F**	F	F	**F**
V	F	V	V	**V**	V	V	**V**
V	F	F	V	**F**	F	V	**F**
F	V	V	V	**V**	V	V	**V**
F	V	F	V	**F**	V	F	**F**
F	F	V	F	**V**	V	V	**V**
F	F	F	F	**V**	V	V	**V**

Les deux colonnes en gras coïncide on a donc montré l'équivalence :

$$[(P \text{ ou } Q) \implies R] \iff [(P \implies R) \text{ et } (Q \implies R)].$$

2. On écrit la négation non(P) :

$$(\text{non}(P)) \quad \exists a \in \mathbb{N},\ \forall b \in \mathbb{N},\ \forall c \in \mathbb{N}, a \neq bc.$$

L'assertion P est vraie. Soit $a \in \mathbb{N}$, on pose $b = a \in \mathbb{N}$, $c = 1 \in \mathbb{N}$, alors on a $bc = a \times 1 = a$.

3. On écrit l'hypothèse de récurrence au rang $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\text{HR}(n) : \text{"} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \text{"}.$$

Initialisation : pour $n = 1$ on a $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} = \frac{n}{n+1}$, ce qui montre que HR(1) est vraie.

Hérédité: on suppose pour $n \in \mathbb{N}^*, \text{HR}(n)$. Montrons HR$(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n+1}{n+2}.
\end{aligned}$$

4. Pour former une équipe on choisit :

   (a) 1 gardien parmi 3, 3 choix.

   (b) 4 défenseurs parmi 6, $\binom{6}{4}$ choix.

   (c) 4 milieux parmi 7, $\binom{7}{4}$ choix.

   (d) 2 attaquants parmi 4, $\binom{4}{2}$ choix.

   On a donc au total $3\binom{6}{4}\binom{7}{4}\binom{4}{2} = 3 \times 15 \times 35 \times 6 = 9450$ équipes possibles.

5. L'ensemble des sous ensemble de E est $\mathcal{P}(E)$. Le nombre de sous ensemble de E est donc $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\mathrm{Card}(E)} = 2^4 = 16$.

6. (a) On suppose que $A \subset B$, montrons que $A \cup B = B$ par double inclusion.
   Il est clair que $B \subset A \cup B$. Montrons que $A \cup B \subset B$:

   - Si $A \cup B = \varnothing$ alors on a bien $A \cup B \subset B$.
   - Sinon soit $x \in A \cup B$, alors $x \in A$ ou $x \in B$, comme $A \subset B$, on en déduit $x \in B$ ou $x \in B$, donc $x \in B$.

   La réciproque est vraie. On suppose $A \cup B = B$, on montre l'inclusion $A \subset B$:

   - Si $A = \varnothing$ alors on a bien $A \subset B$.
   - Sinon soit $x \in A$, alors $x \in A \cup B$, et par hypothèse $A \cup B = B$, donc $x \in B$.

   (b) On raisonne par double implication pour montrer $A = B \iff A \cup B = A \cap B$:
   ($\Longrightarrow$) On suppose $A = B$, alors $A \cup B = A \cup A = A$, et $A \cap B = A \cap A = A$ donc $A \cup B = A = A \cap B$.
   ($\Longleftarrow$) On suppose $A \cap B = A \cup B$. Montrons que $A \subset B$:

   - Si $A = \varnothing$ alors on a bien $A \subset B$.
   - Sinon soit $x \in A$ alors $x \in A \cup B$, or par hypothèse $A \cup B = A \cap B$, d'où $x \in A \cap B$, ce qui veut dire que $x \in A$ et $x \in B$, en particulier $x \in B$.

   Par symétrie des rôles de A et B on a aussi $B \subset A$. Donc $A = B$.