Université Clermont Auvergne	L1 mathématiques
UFR de Mathématiques	Année 2020-2021

U.E. MAAS, portails "Sans Maths" (code Z120BU04TA)

Groupe L1 portails "Sans Maths", le 11 mai 2021, 16h–17h30

Rédacteur du sujet :	Durée de l'épreuve : 1h30.
Équipe pédagogique MAAS	Feuilles de synthèse TCM S1 & MAAS S2 et calculatrices autorisées.
Nb. de pages : 1	Les réponses doivent être justifiées ;
	La rédaction sera prise en compte dans l'évaluation de la copie.

Exercice 1 [5 points]

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \ln(x^2 + xy + y^2 + 1)$.

1. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
2. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{\text{grad}}\,(f)(0,2)$, le vecteur gradient de f au point $M = (0,2)$.
3. Quelle valeur doit prendre le réel z pour que le point de coordonnées $(0,2,z)$ appartienne à la surface représentative de f ?
4. On note L la ligne de niveau de f à laquelle appartient le point $M = (0,2)$. Parmi les points $M_1 = (-2,2)$, $M_2 = (2,0)$, $M_3 = (2,2)$ et $M_4 = (-2,0)$, lesquels appartiennent à L ?
5. Donner l'équation de la tangente à L au point $M = (0,2)$.

Exercice 2 [6 points]

1. Chute d'une goutte de pluie
   Dans l'atmosphère, les gouttes de pluie chutent par gravité. Pour un diamètre de goutte de 400 μm, on trouve que la vitesse de chute (en m.s^{-1}) en fonction du temps a pour équation :
   $$V' + 2V = 9{,}8.$$
   (a) Quelles sont les solutions de cette équation différentielle ?
   (b) Chercher la solution V_0 de cette équation différentielle qui vérifie, à l'instant $t = 0$, $V_0(0) = 0$.
   (c) Quelle est la limite de V_0 lorsque $t \to +\infty$? *On appelle cette limite la vitesse terminale.*
2. (a) Donner les solutions de l'équation $4y'' + 4y' - 3y = 0$.
   (b) Donner les solutions de l'équation $y'' - 2y' + 10y = 0$.

Exercice 3 [9 points]

(1) On considère les matrices suivantes
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$
Parmi les produits AB, BA, A^2 et B^2 lesquels sont possibles ? Lorsque c'est le cas, calculer ces produits (on explicitera les calculs).

(2) On considère la matrice suivante $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer $A^2 - 5A$.
   (b) En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

(3) Résoudre le système suivant à l'aide de la méthode du pivot de Gauss
$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 4y & + & z & = & 2 \\ 2x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ x & - & 2y & + & z & = & 0 \end{array} \right. .$$

Correction de l'examen du 11/05/21

Proposée par Sue Claret, Léo Hahn Lecler, Clément Legrand, Vincent Souveton et Emilien Zabeth

Correction de l'Exercice 1.

1. On commence par calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(X_0, Y_0)$. On pose

$$\varphi(x) = f(x, Y_0) = \ln\left(x^2 + xY_0 + Y_0^2 + 1\right)$$

puis on dérive

$$\varphi'(x) = \left[\ln\left(x^2 + xY_0 + Y_0^2 + 1\right)\right]' = \frac{\left[x^2 + xY_0 + Y_0^2 + 1\right]'}{x^2 + xY_0 + Y_0^2 + 1} = \frac{2x + Y_0}{x^2 + xY_0 + Y_0^2 + 1}$$

en utilisant $[\ln u]' = \frac{u'}{u}$ et on évalue

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X_0, Y_0) = \varphi'(X_0) = \frac{2X_0 + Y_0}{X_0^2 + X_0Y_0 + Y_0^2 + 1}.$$

On calcule ensuite $\frac{\partial f}{\partial y}$. On pose

$$\varphi(y) = f(X_0, y) = \ln\left(X_0^2 + X_0y + y^2 + 1\right)$$

puis on dérive

$$\varphi'(y) = \left[\ln\left(X_0^2 + X_0y + y^2 + 1\right)\right]' = \frac{\left[X_0^2 + X_0y + y^2 + 1\right]'}{X_0^2 + X_0y + y^2 + 1} = \frac{X_0 + 2y}{X_0^2 + X_0y + y^2 + 1}$$

et on évalue

$$\frac{\partial f}{\partial y}(X_0, Y_0) = \varphi'(Y_0) = \frac{X_0 + 2Y_0}{X_0^2 + X_0Y_0 + Y_0^2 + 1}.$$

2. On a

$$\vec{\text{grad}} f(0,2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,2) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\times 0 + 2}{0^2 + 0\times 2 + 2^2 + 1} \\ \frac{2\times 2 + 0}{0^2 + 0\times 2 + 2^2 + 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

3. Le $(0, 2, z)$ appartient à la surface représentative de f si et seulement si

$$\begin{aligned} f(0,2) = z &\iff \\ \ln(0^2 + 0\times 2 + 2^2 + 1) = z &\iff \\ \ln(5) = z&. \end{aligned}$$

4. Les points de L sont tous les points pour lesquels f a la même valeur qu'en $(0, 2)$. On a

- $f(-2,2) = \ln\left((-2)^2 - 2\times 2 + 2^2 + 1\right) = \ln(5)$ donc le point $(-2, 2)$ appartient à L.
- $f(2,0) = \ln\left(2^2 + 0\times 2 + 0^2 + 1\right) = \ln(5)$ donc le point $(2, 0)$ appartient à L.
- $f(2,2) = \ln\left(2^2 + 2\times 2 + 2^2 + 1\right) = \ln(13) \neq \ln(5)$ donc le point $(2, 2)$ n'appartient pas à L.
- $f(-2,0) = \ln\left((-2)^2 - 2\times 0 + 0^2 + 1\right) = \ln(5)$ donc le point $(-2, 0)$ appartient à L.

5. L'équation de la tangente à une ligne de niveau est

$$(x - X_0)\frac{\partial f}{\partial x}(X_0, Y_0) + (y - Y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(X_0, Y_0) = 0$$

donc dans notre cas

$$\begin{aligned}(x-0)\frac{\partial f}{\partial x}(0,2) + (y-2)\frac{\partial f}{\partial y}(0,2) = 0 &\iff \\ (x-0)\times\frac{2}{5} + (y-2)\times\frac{4}{5} = 0 &\iff \\ \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{8}{5} = 0.&\end{aligned}$$

Correction de l'Exercice 2.

1. (a) On commence par résoudre l'équation homogène associée $V' + 2V = 0$, pour laquelle les solutions sont de la forme $t \mapsto Ke^{-2t}$, où $K \in \mathbb{R}$ est une constante.

   Il faut ensuite trouver une solution particulière. Comme le second membre est une fonction constante, on peut chercher une solution particulière constante, que l'on note y_p. Ainsi $y_p'(t) = 0$ pour tout t, donc y_p est solution si et seulement si $2y_p(t) = 9,8$ pour tout t, ce qui équivaut à $y_p(t) = 4,9$ pour tout t.

   Les solutions de l'équation différentielle sont donc de la forme

   $$t \mapsto Ke^{-2t} + 4,9,$$

   où $K \in \mathbb{R}$ est une constante.

   (b) Comme V_0 est solution de l'équation différentielle, on sait qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $V_0(t) = Ke^{-2t} + 4,9 \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Ainsi

   $$V_0(0) = 0 \iff Ke^0 + 4,9 = 0 \iff K = -4,9.$$

   Donc $V_0(t) = -4,9e^{-2t} + 4,9$ pour tout t.

   (c) On a

   $$\lim_{t\to\infty} V_0(t) = \lim_{t\to\infty} -4,9e^{-2t} + \lim_{t\to\infty} 4,9 = 0 + 4,9 = 4,9.$$

2. (a) L'équation caractéristique associée est $4X^2 + 4X - 3 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 64$, donc les solutions de l'équation caractéristique sont

   $$\lambda_1 = \frac{1}{2},\ \lambda_2 = \frac{-3}{2}.$$

   Ainsi, les solutions de l'équation différentielle sont de la forme

   $$x \mapsto K_1 e^{\frac{1}{2}x} + K_2 e^{-\frac{3}{2}x},$$

   où $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ sont des constantes.

   (b) L'équation caractéristique associée est $X^2 - 2X + 10 = 0$. Le discriminant est $\Delta = -36$, donc les solutions de l'équation caractéristique sont

   $$\lambda_1 = 1 + 3i,\ \lambda_2 = 1 - 3i.$$

   Ainsi, les solutions de l'équation différentielle sont de la forme

   $$x \mapsto (K_1\cos(3x) + K_2\sin(3x))e^x,$$

   où $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ sont des constantes.

Correction de l'Exercice 3.

1. Le produit matriciel $M \times N$ est possible si et seulement si le nombre de colonnes de M est égal au nombre de lignes de N. Connaissant cette règle, on peut effectuer :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 & -2+5 & 8+3 \\ 4+6 & -4+15 & 16+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 11 \\ 10 & 11 & 25 \end{pmatrix}$$

et

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+4 & 2+3 \\ 8+12 & 4+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \end{pmatrix}$$

2. (a) En utilisant la question précédente,

$$A^2 - 5A = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5\times 2 & 5\times 1 \\ 5\times 4 & 5\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 20 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -2I_2$$

(b) Ainsi,

$$\frac{-1}{2}\left(A^2 - 5A\right) = I_2 \iff A \times \frac{(-1)}{2}(A - 5I_2) = I_2$$

Par conséquent, A est inversible d'inverse $\frac{-1}{2}(A - 5I_2) = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 2-5 & 1-0 \\ 4-0 & 3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. On commence par écrire le système en version matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

et on applique l'algorithme du pivot de Gauss :

- $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -9 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

- $L_2 \leftarrow \frac{-1}{9} L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & -6 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

- $L_3 \leftarrow L_3 + 6L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ainsi, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ est solution du système si et seulement si :

$$\begin{cases} x + 4y + z = 2 \\ y = 1/3 \\ z = z \end{cases} \underset{L_1 \to L_1 - 4L_2}{\iff} \begin{cases} x + z = 2/3 \\ y = 1/3 \\ z = z \end{cases}$$

Il y a donc une infinité de solutions au système et elles sont de la forme $\left(\frac{2}{3} - z, \frac{1}{3}, z\right),\ z \in \mathbb{R}$.