Université Clermont Auvergne
UFR de Mathématiques

L1 mathématiques
Année 2020-2021

U.E. MAAS, portail "Avec Maths" (code Z120BU03TA)

Seconde chance tous portails "Avec Maths", le 16 juin 2021, 13h30–15h00

Rédacteur du sujet :	Durée de l'épreuve : 1h30.
Équipe pédagogique MAAS	Feuilles de synthèse TCM S1 & MAAS S2 et calculatrices autorisées.
Nb. de pages : 2	Les réponses doivent être justifiées ;
	La rédaction sera prise en compte dans l'évaluation de la copie.

Exercice 1

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = x^2 e^{(xy)}$.

On note $\mathcal{S}$ la surface représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

1. Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
2. Que vaut le vecteur gradient de f au point $(1,0)$? Représenter graphiquement le vecteur gradient de f au point $(1,0)$.
3. Montrer que le point M de coordonnées $(1,0,1)$ appartient à $\mathcal{S}$.
4. Donner une équation cartésienne de la tangente à la ligne de niveau L_1 au point $(1,0)$.
5. Donner une équation cartésienne du plan tangent à $\mathcal{S}$ au point M.

Exercice 2

1. L'accroissement de la population P d'un pays est proportionnel à cette population. On note $P(t)$ la population du pays à l'instant t (l'unité de temps est l'année).
   (a) On note α ce coefficient de proportionnalité. La population vérifie alors l'équation :
   $$P'(t) = \alpha P(t).$$
   Résoudre cette équation.
   (b) On sait que la population de ce pays double tous les 50 ans. En déduire la valeur exacte de α. En combien de temps la population de ce pays triple-t-elle ?
2. Donner toutes les solutions de l'équation $y' - 3y = 3x^2 e^{3x}$.
3. On considère l'équation $y'' - 4y' + 3y = 0$.
   (a) Résoudre cette équation.
   (b) Donner la solution de l'équation vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 3

1. Donner la négation des assertions suivantes et justifier si elles sont vraies ou fausses.
   (P) $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N}^*, \exists p \in \mathbb{N};\ m + p > 2n$
   (Q) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x < y \Rightarrow x^2 < y^2)$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner la contraposée de l'implication suivante :
   $$n \geq 4 \Rightarrow 2^n \leq n!$$
3. Soit $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Démontrer par recurrence que pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a
   $$\sum_{k=2}^{n} q^k = q^2 \left(\frac{q^{n-1} - 1}{q - 1}\right)$$

↪ Tournez la page SVP ↪

4. Soient E un ensemble non vide et A et B deux parties de E.
   Montrer que : $A \subset B \Longrightarrow \complement_E B \subset \complement_E A$.
5. On veut créer un mot de passe de 6 caractères donnant accès à un site sur internet. Le premier caractère est à choisir dans $\{A, B\}$, les deux suivants (distincts ou non) dans $\{a, b, c\}$ puis trois chiffres (distincts ou non) entre 1 et 9 (exemples Abb353, Bbc136 et Bca949).
   (a) Combien de mots de passe peut-on former ?
   (b) Combien existe-t-il de mots de passe se terminant par 1 ou 9 ?
   (c) Combien existe-t-il de mots de passe ne se terminant ni par 1 ni par 9 ?
   (d) Combien de mots de passe dont les caractères sont différents deux à deux peut-on former ?

Correction de l'examen du 16/06/21

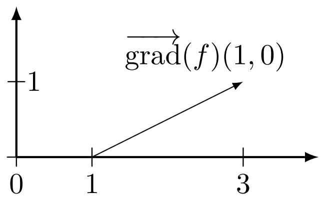
Proposée par Sue Claret, Léo Hahn Lecler, Clément Legrand, Vincent Souveton et Emilien Zabeth

Correction de l'Exercice 1.

1. Les dérivées partielles de f sont données par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = xe^{xy}(xy+2) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3e^{xy}.$$

2. $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)(1,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$



3. $\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y) = z\}$. Or $f(1,0) = 1$, donc $(1,0,1) \in \mathcal{S}$.
4. Une équation de la tangente à la ligne L_1 au point $(1,0)$ est donnée par

$$\begin{aligned} &(x-1)\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) + (y-0)\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0 \\ \iff &2(x-1) + y = 0 \\ \iff &2x + y - 2 = 0. \end{aligned}$$

5. Une équation cartésienne du plan tangent à $\mathcal{S}$ au point M est donnée par

$$\begin{aligned} &(x-1)\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) + (y-0)\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) - (z-1) = 0 \\ \iff &2(x-1) + y - z + 1 = 0 \\ \iff &2x + y - z - 1 = 0. \end{aligned}$$

Correction de l'Exercice 2.

1. (a) Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme

$$t \mapsto Ke^{\alpha t},$$

où $K \in \mathbb{R}$ est une constante.

(b) Par la question précédente, on sait qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $P(t) = Ke^{\alpha t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Par l'énoncé on sait que $P(50) = 2P(0)$, ce qui signifie $Ke^{50\alpha} = 2Ke^0$, donc que $e^{50\alpha} = 2$. Mais on a

$$e^{50\alpha} = 2 \iff 50\alpha = \ln(2) \iff \alpha = \frac{\ln(2)}{50}.$$

On cherche ensuite $T \in \mathbb{R}$ tel que $P(T) = 3P(0)$, c'est-à-dire $Ke^{\alpha T} = 3Ke^0$, ou encore $e^{\alpha T} = 3$. Mais

$$e^{\alpha T} = 3 \iff \alpha T = \ln(3) \iff T = \frac{\ln(3)}{\alpha} = 50\frac{\ln(3)}{\ln(2)}.$$

On a donc $T \approx 79,3$. La population triple donc au bout d'environ $79,3$ années.

2. On commence par résoudre l'équation homogène associée $y' - 3y = 0$, pour laquelle les solutions sont de la forme $x \mapsto Ke^{3x}$, où $K \in \mathbb{R}$ est une constante.

   Il faut ensuite trouver une solution particulière. Pour cela, on peut utiliser la méthode de variation de la constante: on cherche une solution de la forme $y_p : x \mapsto g(x)e^{3x}$, où g est une fonction à déterminer. On a $y_p'(x) = g'(x)e^{3x} + 3g(x)e^{3x}$, donc

$$\begin{aligned} y_p'(x) - 3y_p(x) &= g'(x)e^{3x} + g(x)e^{3x} - 3y_p(x) \\ &= g'(x)e^{3x} + 3g(x)e^{3x} - 3g(x)e^{3x} = g'(x)e^{3x}. \end{aligned}$$

   On en déduit donc que y_p est solution de l'équation différentielle si et seulement si $g'(x)e^{3x} = 3x^2e^{3x}$, ou autrement dit $g'(x) = 3x^2$. Il suffit donc de poser $g : x \mapsto x^3$.

   Les solutions de l'équation différentielle sont donc de la forme

$$x \mapsto Ke^{3x} + x^3e^{3x},$$

   où $K \in \mathbb{R}$ est une constante.

3. (a) L'équation caractéristique associée est $X^2 - 4X + 3 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 4$, donc les solutions de l'équation caractéristique sont

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3.$$

   Ainsi, les solutions de l'équation différentielle sont de la forme

$$x \mapsto K_1e^x + K_2e^{3x},$$

   où $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ sont des constantes.

   (b) Soit y une solution de l'équation différentielle vérifiant $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$. Comme y est solution de l'équation, on sait par ce qui précède qu'il existe $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ tels que $y(x) = K_1e^x + K_2e^{3x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi

$$y(0) = 1 \iff K_1e^0 + K_2e^0 = 1 \iff K_1 + K_2 = 1.$$

   D'autre part un simple calcul de dérivée montre que

$$y'(x) = K_1e^x + 3K_2e^{3x},$$

   d'où

$$y'(0) = K_1 + 3K_2.$$

   Ainsi, la condition $y'(0) = 0$ signifie que $K_1 + 3K_2 = 0$. On cherche donc à résoudre le système

$$\begin{cases} K_1 + K_2 = 1 \\ K_1 + 3K_2 = 0 \end{cases}$$

   qui est équivalent à

$$\begin{cases} -2K_2 = 1 \\ K_1 = -3K_2. \end{cases}$$

   L'unique solution est $(K_1, K_2) = (\frac{3}{2}, \frac{-1}{2})$. Ainsi

$$y(x) = \frac{3}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{3x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'Exercice 3.

1. Négation de P :

$$(\text{non}(P)) \quad \exists n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N}^*,\ \forall p \in \mathbb{N},\ m+p \leq 2n.$$

L'assertion P est vrai. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^*$, on pose $p = 2n$, alors $m+p > p = 2n$, donc $m+p > 2n$.

Négation de Q :

$$(\text{non}(Q)) \quad \exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ (x < y \text{ et } x^2 \geq y^2).$$

L'assertion Q est fausse en effet, soient $x = -2$ et $y = 1$, alors $x = -2 < 1 = y$ et $x^2 = 4 \geq 1 = y^2$.

2. Contraposée :

$$2^n > n! \implies n < 4.$$

3. On écrit l'hypothèse de récurrence au rang $n \geq 2$:

$$\text{HR}(n) : \text{"} \sum_{k=2}^{n} q^k = q^2 \left(\frac{q^{n-1}-1}{q-1} \right) \text{"}.$$

Initialisation : pour $n = 2$ on a $\sum_{k=2}^{n} q^k = \sum_{k=2}^{2} q^k = q^2 = q^2 \left(\frac{q^{n-1}-1}{q-1} \right)$, ce qui montre que HR(2) est vraie.

Hérédité : on suppose pour $n \geq 2, \text{HR}(n)$. Montrons $\text{HR}(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n+1} q^k &= \sum_{k=2}^{n} q^k + q^{n+1} \\
&= q^2 \left(\frac{q^{n-1}-1}{q-1} \right) + q^{n+1} \\
&= \frac{q^{n+1}-q^2}{q-1} + \frac{q^{n+1}(q-1)}{q-1} \\
&= \frac{q^{n+1}-q^2+q^{n+2}-q^{n+1}}{q-1} \\
&= \frac{q^{n+2}-q^2}{q-1} \\
&= q^2 \left(\frac{q^n-1}{q-1} \right).
\end{aligned}$$

4. On suppose $A \subset B$, montrons $\complement_E B \subset \complement_E A$:

   - Si $\complement_E B = \varnothing$, on a bien $\complement_E B \subset \complement_E A$.
   - Sinon, soit $x \in \complement_E B$, alors $x \in E$ et $x \notin B$. Supposons par l'absurde que $x \in A$, alors comme $A \subset B$, on a que $x \in B$ contradiction. D'où $x \in E$ et $x \notin A$, donc $x \in \complement_E A$.

5. L'ensemble des mots de passe est donnée par :

$$\Omega = \{A, B\} \times \{a, b, c\}^2 \times \{1, 2, \ldots, 9\}^3$$

Le nombre de mot de passe que l'on peut former est donc $\text{Card}(\Omega) = 2 \times 3^2 \times 9^3 = 13122$.

Pour faire un mot de passe finissant par 1 ou 9 on choisit :

- La première lettre A ou B : 2 choix.
- Les deux lettres parmi a, b et c : 3^2 choix.
- Les deux premiers chiffres entre 1 et 9 : 9^2 choix.
- Le dernier chiffre 1 ou 9 : 2 choix.

Il y a donc $2 \times 3^2 \times 9^2 \times 2 = 2916$ mots de passe finissant par 1 ou 9.

Il y a $13122 - 2916 = 10206$ mots de passe se terminant ni par 1 ni par 9.

Pour faire un mot de passe dont les caractères sont différents deux à deux on choisit :

- La première lettre majuscule A ou B : 2 choix.
- La première lettre minuscule $\alpha \in \{a, b, c\}$: 3 choix.
- La deuxième lettre minuscule $\beta \in \{a, b, c\} \setminus \{\alpha\}$: 2 choix.
- Le premier chiffre $x \in \{1, \ldots, 9\}$: 9 choix.
- Le deuxième chiffre $y \in \{1, \ldots, 9\} \setminus \{x\}$: 8 choix.
- Le troisième chiffre $z \in \{1, \ldots, 9\} \setminus \{x, y\}$: 7 choix.

Il y a donc $2 \times 3 \times 2 \times 9 \times 8 \times 7 = 6048$ mots de passe dont les caractères sont différents deux à deux.