| | |
|---|---|
| Université Clermont Auvergne | L1 mathématiques |
| UFR de Mathématiques | Année 2020-2021 |

U.E. MAAS, PORTAIL "SANS MATHS" (CODE Z120BU04TA)

Seconde chance tous portails "Sans Maths", le 16 juin 2021, 16h–17h30

| | |
|---|---|
| Rédacteur du sujet : | Durée de l'épreuve : 1h30. |
| Équipe pédagogique MAAS | Feuilles de synthèse TCM S1 & MAAS S2 et calculatrices autorisées. |
| Nb. de pages : 2 | Les réponses doivent être justifiées ; |
| | La rédaction sera prise en compte dans l'évaluation de la copie. |

## Exercice 1

Pour tous $x$, $y \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x, y) = e^x - (\cos(x) + 2)\sin(2y).$$

On note $\mathcal{S}$ la surface représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

1. Vérifier que le point $P(0, \frac{\pi}{2})$ appartient à la ligne de niveau $L_1$.
2. Calculer, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.
3. Que vaut le vecteur gradient de $f$ en $P$ ?
4. Déterminer l'équation de la tangente en $P$ à la ligne de niveau $L_1$.
5. Déterminer l'équation du plan tangent à la surface $\mathcal{S}$ en le point de coordonnées $(0, \frac{\pi}{2}, f(0, \frac{\pi}{2}))$.

## Exercice 2

1. On souhaite résoudre l'équation différentielle
$$Y' + 3Y = e^x. \tag{1}$$
   (a) Donner toutes les solutions de l'équation différentielle
   $$Y' + 3Y = 0.$$
   (b) Déterminer une solution particulière de l'équation (1).
   (c) Résoudre l'équation différentielle (1).
   (d) Déterminer la solution de l'équation différentielle (1) qui vaut 3 en $x = 0$.
2. Résoudre l'équation différentielle
$$Y'' - 3Y' - 10Y = 0.$$
3. Résoudre l'équation différentielle
$$Y'' - 4Y' + 13Y = 0.$$

## Exercice 3

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

**Partie 1.**

En utilisant l'algorithme du pivot de Gauss, résoudre les deux systèmes ci-dessous, et préciser les solutions et le nombre de solutions pour chacun d'eux.
(On demande d'écrire de façon claire, à chaque étape de l'algorithme de Gauss, les opérations effectuées.)

$$(S_1)\begin{cases} x + y + 4z = 1 \\ -3x - 2y - 9z = 0 \\ x - 2y - z = -4 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ -2x - y + z = -3 \\ -x + y + 4z = 1 \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ Tournez la page SVP $\hookrightarrow$

**Partie 2.**

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1- Calculer $AB$ (expliquer comment obtenir les coefficients de $AB$).

2- En déduire (sans refaire de calcul) la matrice $BA$.

3- Déduire de la question précédente la matrice $(2.\mathrm{I}_2 + B)A - 2A$. (On précisera les étapes du calcul effectué.)

# Correction de l'examen du 16/06/21

Proposée par Sue Claret, Léo Hahn Lecler, Clément Legrand, Vincent Souveton et Emilien Zabeth

**Correction de l'Exercice 1.**

1. Vérifier que le point $P = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ appartient à la ligne de niveau $L_1$ revient à vérifier que $f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = 1$. On calcule
$$f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = e^0 - (\cos(0) + 2)\sin\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) = 1 + (1+2) \times 0 = 1.$$

2. On commence par calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(X_0, Y_0)$. On pose
$$\varphi(x) = f(x, Y_0) = e^x - (\cos(x) + 2)\sin(2Y_0)$$
puis on dérive
$$\begin{aligned}\varphi(x) &= [e^x - (\cos(x) + 2)\sin(2Y_0)]' \\ &= [e^x]' - [(\cos(x) + 2)\sin(2Y_0)]' \\ &= e^x - \sin(2Y_0)[\cos(x) + 2]' \\ &= e^x - \sin(2Y_0)(-\sin(x))\end{aligned}$$
et on évalue
$$\frac{\partial f}{\partial x}(X_0, Y_0) = \varphi'(X_0) = e^{X_0} + \sin(X_0)\sin(2Y_0).$$
On calcule maintenant $\frac{\partial f}{\partial y}(X_0, Y_0)$. On pose
$$\varphi(y) = f(X_0, y) = e^{X_0} - (\cos(X_0) + 2)\sin(2y)$$
puis on dérive
$$\begin{aligned}\varphi'(y) &= \left[e^{X_0} - (\cos(X_0) + 2)\sin(2y)\right]' \\ &= \left[e^{X_0}\right]' - [(\cos(X_0) + 2)\sin(2y)]' \\ &= 0 - (\cos(X_0) + 2)[\sin(2y)]' \\ &= -(\cos(X_0) + 2)(2\cos(2y))\end{aligned}$$
et on évalue
$$\frac{\partial f}{\partial y}(X_0, Y_0) = \varphi'(Y_0) = -2(\cos(X_0) + 2)\cos(2Y_0).$$

3. On a
$$\vec{\text{grad}} f(X_0, Y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(X_0, Y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(X_0, Y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{X_0} + \sin(X_0)\sin(2Y_0) \\ -2(\cos(X_0) + 2)\cos(2Y_0) \end{pmatrix}$$
donc en particulier
$$\vec{\text{grad}} f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} e^0 + \sin(0)\sin\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) \\ -2(\cos(0) + 2)\cos\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 0 \times 0 \\ -2 \times (1+2) \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

4. L'équation de la tangente à la ligne de niveau au point $(X_0, Y_0)$ est
$$(x - X_0)\frac{\partial f}{\partial x} f(X_0, Y_0) + (y - Y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(X_0, Y_0) = 0$$

donc dans notre cas

$$\begin{aligned}(x-0)\frac{\partial f}{\partial x}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)+\left(y-\frac{\pi}{2}\right)\frac{\partial f}{\partial y}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=0 &\iff\\ (x-0)\times 1+\left(y-\frac{\pi}{2}\right)\times 6=0 &\iff\\ x+6y-3\pi=0&\end{aligned}$$

où on a utilisé que $\frac{\partial f}{\partial x}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=6$.

5. L'équation du plan tangent est

$$(x-X_0)\frac{\partial f}{\partial x}f\left(X_0,Y_0\right)+(y-Y_0)\frac{\partial f}{\partial y}\left(X_0,Y_0\right)-\left(z-f\left(X_0,Y_0\right)\right)=0$$

donc dans notre cas

$$\begin{aligned}(x-0)\frac{\partial f}{\partial x}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)+\left(y-\frac{\pi}{2}\right)\frac{\partial f}{\partial y}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)-\left(z-f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)=0 &\iff\\ (x-0)\times 1+\left(y-\frac{\pi}{2}\right)\times 6-(z-1)=0 &\iff\\ x+6y-z-3\pi+1=0&\end{aligned}$$

où on a utilisé que $f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=1$.

**Correction de l'Exercice 2.**

1. (a) Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme

$$x\mapsto Ke^{-3x},$$

où $K\in\mathbb{R}$ est une constante.

(b) On utilise la méthode de variation de la constante: on cherche une solution de la forme $y_p : x\mapsto g(x)e^{-3x}$, où $g$ est une fonction à déterminer. On a

$$y_p'(x)=g'(x)e^{-3x}-3g(x)e^{-3x},$$

donc

$$y_p'(x)+3y_p(x)=g'(x)e^{-3x}-3g(x)e^{-3x}+3g(x)e^{-3x}=g'(x)e^{-3x}.$$

Ainsi $y_p$ est une solution si et seulement si $g'(x)e^{-3x}=e^x$ pour tout $x$, ou autrement dit

$$g'(x)=e^{4x}\quad\forall x\in\mathbb{R}.$$

Il suffit donc de poser $g(x)=\frac{1}{4}e^{4x}$, d'où $y_p(x)=\frac{1}{4}e^x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

(c) Les solutions sont de la forme

$$x\mapsto Ke^{-3x}+\frac{1}{4}e^x,$$

où $K\in\mathbb{R}$ est une constante.

(d) Soit $y$ la solution telle que $y(0)=3$. On sait qu'il existe $K\in\mathbb{R}$ tel que $y(x)=Ke^{-3x}+\frac{1}{4}e^x$. Ainsi

$$y(0)=3\iff Ke^0+\frac{1}{4}e^0=3\iff K+\frac{1}{4}=3\iff K=\frac{11}{4}.$$

On a donc

$$y(x)=\frac{11}{4}e^{-3x}+\frac{1}{4}e^x\quad\forall x\in\mathbb{R}.$$

2. L'équation caractéristique associée est $X^2 - 3X - 10 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 49$, donc les solutions de l'équation caractéristique sont

$$\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = -2.$$

Ainsi, les solutions de l'équation différentielle sont de la forme

$$x \mapsto K_1 e^{5x} + K_2 e^{-2x},$$

où $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ sont des constantes.

3. L'équation caractéristique associée est $X^2 - 4X + 13 = 0$. Le discriminant est $\Delta = -36$, donc les solutions de l'équation caractéristique sont

$$\lambda_1 = 2 + 3i,\ \lambda_2 = 2 - 3i.$$

Ainsi, les solutions de l'équation différentielle sont de la forme

$$x \mapsto (K_1 \cos(3x) + K_2 \sin(3x)) e^{2x},$$

où $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ sont des constantes.

**Correction de l'Exercice 3.**

**Partie 1.**

- On commence par écrire le système $(S_1)$ sous forme de matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 \\ -3 & -2 & -9 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

et on applique l'algorithme du pivot de Gauss :

  - $L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -5 & -5 \end{array}\right)$$

  - $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

  - $L_3 \leftarrow \frac{1}{4} L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ainsi, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ est solution du système si et seulement si :

$$\begin{cases} x + y + 4z = 1 \\ y + 3z = 3 \\ z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Il y a donc une unique solution $(x, y, z) = (-3, 0, 1)$ au système $(S_1)$.

- On commence par écrire le système $(S_2)$ sous forme de matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

et on applique l'algorithme du pivot de Gauss :

  - $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 7 & 5 \\ 0 & 3 & 7 & 5 \end{array}\right)$$

  - $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  - $L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ainsi, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ est solution du système si et seulement si :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ y + \frac{7}{3}z = \frac{5}{3} \\ z = z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4 - 3z - \frac{10}{3} + \frac{14}{3}z = \frac{2}{3} + \frac{5}{3}z \\ y = \frac{5}{3} - \frac{7}{3}z \\ z = z \end{cases}$$

Il y a donc une infinité de solutions au système $(S_2)$ et elles sont de la forme $\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{3}z, \frac{5}{3} - \frac{7}{3}z, z\right)$, $z \in \mathbb{R}$.

**Partie 2.**

1. $$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+4 & 2-2 \\ -6+6 & 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

2. On a en fait montré à la question précédente que les matrices $A$ et $B$ sont inverses l'une de l'autre. Ainsi, $BA = AB = I_2$.

3. En utilisant les opérations de base sur les matrices, en particulier la distributivité, et la question 2, on trouve :

$$\begin{aligned} (2 \cdot I_2 + B)A - 2A &= 2 \cdot I_2A + BA - 2A \\ &= 2A + BA - 2A \\ &= BA \\ &= I_2 \end{aligned}$$