Université Clermont Auvergne	L1 mathématiques
UFR de Mathématiques	Année 2020-2021

U.E. MAAS, PORTAIL "AVEC MATHS" (CODE Z120BU03)

Groupe LAS portails "Avec Maths", le 27 avril 2021, 10h–11h30

Rédacteur du sujet : Équipe pédagogique MAAS Nb. de pages : 2	Durée de l'épreuve : 1h30. Feuilles de synthèse TCM S1 & MAAS S2 et calculatrices autorisées. Les réponses doivent être justifiées ; La rédaction sera prise en compte dans l'évaluation de la copie.

Exercice 1 [5 points]

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x\sin(xy)$.

1. Calculer les dérivées partielles de f.
2. Déterminer $\overrightarrow{\text{grad}} f(-1;\pi)$.
3. Donner la valeur du réel a telle que le point $(-1;\pi)$ appartienne à la ligne de niveau a, notée L_a.
4. Donner l'équation de la tangente à la ligne de niveau L_a au point $(-1;\pi)$, avec a le réel de la question précédente.
5. Donner l'équation du plan tangent à la surface S représentative de f au point $(-1;\pi;f(-1,\pi))$.

Exercice 2 [6 points]

1. Une personne est placée sous perfusion de pénicilline à raison de 0,1 milligramme de substance par minute. On note $Q(t)$ la quantité de pénicilline présente dans le sang au temps t (en **minutes**).
   On admet qu'il existe un réel λ strictement positif tel que la fonction Q vérifie l'équation différentielle :
   $$Q'(t) = 0{,}1 - \lambda Q(t). \qquad \text{(E)}$$
   (a) i. Résoudre l'équation homogène associée à (E).
   ii. Trouver une fonction constante, solution particulière de (E).
   iii. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

   (b) Sachant que $Q(0) = 0$, exprimer $Q(t)$ en fonction de λ et t.

   (c) Vérifier que Q est croissante et calculer sa limite en $+\infty$.

   (d) Donner la valeur de λ sachant qu'au bout de 180 minutes, la quantité de pénicilline présente dans le sang est de $\dfrac{0{,}05}{\lambda}$. *On demande dans cette question la valeur exacte de* λ.
2. Résoudre l'équation différentielle linéaire du second ordre suivante : $9y'' - 6y' + y = 0$.

Exercice 3 [9 points]

Le but de l'exercice est de résoudre les questions indépendantes suivantes.

1. À l'aide d'un raisonnement par contraposition démontrer pour un entier naturel n, si n^2 est un nombre impair alors n est un nombre impair.
2. On considère l'assertion P suivante :
   $$\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{1}{x} > 1 \implies 0 < x^2 < 1$$
   Écrire la négation de P. L'assertion P est-elle vraie ?
3. On rappelle que pour $n \geq 1$ on note $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n$.
   Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1;2;3\},\ n! \geq 2^n$.

4. Dans un club de basket, il y a 9 joueurs. Combien de possibilités a l'entraîneur pour choisir les 5 joueurs de son équipe qui vont jouer sur le terrain ? *Une équipe est considérée ici sans ordre : tous les joueurs ont le même rôle.*
5. Compter le nombre d'anagrammes qu'on peut faire avec le prénom ("mots" constitués avec les mêmes lettres mais pas nécessairement dans le même ordre) : SARAH.
6. Soient E un ensemble et A,B,C trois parties non vide de E, démontrer l'égalité suivante :

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Correction de l'examen du 27/04/21

Proposée par Sue Claret, Léo Hahn Lecler, Clément Legrand, Vincent Souveton et Emilien Zabeth

Correction de l'Exercice 1.

1. Les dérivées partielles de f sont les suivantes
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin(xy) + xy\cos(xy) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2\cos(xy).$$

2. $$\overrightarrow{\text{grad}} f(-1,\pi) = \frac{\partial f}{\partial x}(-1,\pi)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(-1,\pi)\vec{j} = (\sin(-\pi) - \pi\cos(-\pi))\,\vec{i} + \cos(-\pi)\vec{j} = \pi\vec{i} - \vec{j}.$$

3. La ligne de niveau L_a est l'ensemble suivant
$$L_a = \{(x,y); f(x,y) = a\}.$$
On veut déterminer a de tel sorte que $(-1,\pi) \in L_a$ c'est-à-dire tel que $f(-1,\pi) = a$. En particulier,
$$f(-1,\pi) = a \quad \Leftrightarrow \quad -\sin(-\pi) = a \quad \Leftrightarrow \quad a = 0$$

4. La tangente à la courbe L_0 au point $(-1,\pi)$ est donnée par
$$(x+1)(\sin(-\pi) - \pi\cos(-\pi)) + (y-\pi)\cos(-\pi) = 0$$
i.e.
$$\pi(x+1) - (y-\pi) = 0 \quad \text{i.e.} \quad \pi x - y + 2\pi = 0.$$

5. L'équation du plan tangent à la surface S représentative de f au point $(-1,\pi; f(-1,\pi))$ est
$$(x+1)(\sin(-\pi) - \pi\cos(-\pi)) + (y-\pi)\cos(-\pi) - (z + \sin(-\pi)) = 0$$
i.e.
$$\pi(x+1) - (y-\pi) - z = 0 \quad \text{i.e.} \ \pi x - y + 2\pi - z = 0.$$

Correction de l'Exercice 2.

1. (a) i. L'équation homogène associée à l'équation (E) est $Q'(t) + \lambda Q(t) = 0$. Ces solutions sont données par
$$Q_h(t) = Ce^{-\lambda t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$
ii. On cherche Q_p une fonction constante solution de (E). En particulier, si Q_p est constante alors $Q'(t) = 0$ et donc Q_p est solution de (E) si et seulement si $\lambda Q(t) = 0.1$. On en déduit donc que $Q(t) = \frac{0.1}{\lambda}$ (qui est constante) est une solution particulière de (E).

iii. Les solutions de l'équation (E) sont donc données par
$$Q(t) = Q_h(t) + Q_p(t) = Ce^{-\lambda t} + \frac{0.1}{\lambda}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

(b) L'objectif de cette question est de trouver la constante C grâce à l'hypothèse supplémentaire $Q(0) = 0$.
$$Q(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Ce^0 + \frac{0.1}{\lambda} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = -\frac{0.1}{\lambda}$$
et donc
$$Q(t) = -\frac{0.1}{\lambda}e^{-\lambda t} + \frac{0.1}{\lambda}.$$

(c) Q est croissante si et seulement si Q' est positive. On calcule donc la dérivée :

$$Q'(t) = \lambda \frac{0.1}{\lambda} e^{-\lambda t} = 0.1 e^{-\lambda t}.$$

La fonction exponentielle étant positive, Q' l'est aussi et donc Q est bien croissante et on a

$$\lim_{t \to +\infty} Q(t) = \frac{0.1}{\lambda}.$$

(d) D'après l'énoncé, on a $Q(180) = \frac{0.05}{\lambda}$ et

$$\begin{aligned} Q(180) = \frac{0.05}{\lambda} \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{0.1}{\lambda} e^{-180\lambda} + \frac{0.1}{\lambda} = \frac{0.05}{\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{0.1}{\lambda} e^{-180\lambda} = -\frac{0.05}{\lambda} \\ &\Leftrightarrow \quad e^{-180\lambda} = \frac{0.05}{0.1} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -180\lambda = \ln(1/2) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -\frac{\ln(1/2)}{180} = \frac{\ln(2)}{180}. \end{aligned}$$

2. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle est $9X^2 - 6X + 1 = 0$. On calcul ensuite le discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 36 = 0.$$

Il y a donc une unique solution à $9X^2 - 6X + 1 = 0$ donnée par

$$\lambda = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}.$$

Ainsi, les solutions de l'équation $9y'' - 6y' + y = 0$ sont données par

$$y(x) = (K_1 + K_2 x) e^{\frac{1}{3}x}, \qquad K_1, K_2 \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'Exercice 3.

1. A l'aide d'un raisonnement par contraposition démontrer pour un entier naturel n, si n^2 est un nombre impair alors n est un nombre impair.

   On veut donc montrer l'implication suivante

$$n^2 \text{ nombre impair } \Rightarrow n \text{ impair.} \tag{1}$$

   Par contraposition, cela est équivalent à démontrer

$$n \text{ pair } \Rightarrow n^2 \text{ pair.} \tag{2}$$

   On suppose donc que n est un entier pair et on montre que n^2 est encore un entier pair. Dire que n est pair revient à dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$ et donc

$$n^2 = (2k)^2 = 2(2k^2)$$

   avec $2k^2 \in \mathbb{Z}$. Donc n^2 est un entier pair. On vient de montrer la contraposée (2). Par contraposition, cela montre l'implication (1).

2. La négation de P est l'assertion

$$\exists x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{1}{x} > 1 \text{ et } \Big(0 \geq x^2 \text{ ou } x^2 \geq 1\Big).$$

   L'assertion P est vraie. Pour cela montrons que non(P) est fausse. Supposons par l'absurde que non(P) est vraie. Il existe donc $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $\frac{1}{x} > 1$ et $\big(0 \geq x^2$ ou $x^2 \geq 1\big)$. Deux cas possibles

- **Cas 1 :** $\frac{1}{x} > 1$ et $0 \geq x^2$. Dans ce cas, $0 \geq x^2$ implique forcément que $x = 0$: contradiction car $x \in \mathbb{R}^*$.
- **Cas 2 :** $\frac{1}{x} > 1$ et $x^2 \geq 1$. Dans ce cas, $x^2 \geq 1$ implique que $x \geq 1$ et donc $\frac{1}{x} \leq 1$: contradiction avec $\frac{1}{x} > 1$.

Ainsi non(P) est fausse et donc P est vraie.

3. Pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1,2,3\}$, notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition "$n! \geq 2^n$".

   Initialisation. Pour $n = 4$, on a

$$n! = 4! = 24 \qquad 2^n = 2^4 = 16.$$

   Donc $\mathcal{P}(4)$ est vraie.

   Hérédité. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1,2,3\}$ et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   Par hypothèse $\mathcal{P}(n)$ est vraie donc $n! \geq 2^n$ et $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1,2,3\}$ donc $n+1 \geq 2$. Par conséquent,

$$(n+1)! = n!(n+1) \geq 2^n(n+1) \geq 2^n 2 = 2^{n+1}. \tag{3}$$

   Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   Conclusion. Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 4$.

4. Il y a $\binom{9}{5} = \frac{9!}{5!4!} = \frac{6\times7\times8\times9}{2\times3\times4} = 7 \times 2 \times 9 = 126$ possibilités.

5. Il y a $\frac{5!}{2!} = 3 \times 4 \times 5 = 60$ anagrammes possibles avec le prénom SARAH.

6. Par double inclusion.
   - $(A \cap B) \cup C \subset (A \cup C) \cap (B \cup C)$
     Soit $x \in (A \cap B) \cup C$. Alors $x \in A \cap B$ ou $x \in C$.
     - Si $x \in A \cap B$ alors $x \in A$ et $x \in B$. En particulier, comme $A \subset A \cup C$ et $B \subset B \cup C$, $x \in A \cup C$ et $x \in B \cup C$ c'est-à-dire $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
     - Si $x \in C$. Alors, comme $C \subset A \cup C$ et $C \subset B \cup C$, $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

     Ainsi, $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
   - $(A \cup C) \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup C$
     Soit $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Alors, $x \in A \cup C$ et $x \in B \cup C$. Deux cas possibles : soit $x \in C$, soit $x \notin C$.
     - Si $x \in C$, alors $x \in (A \cap B) \cup C$.
     - Si $x \notin C$, alors $x \in A$ et $x \in B$ c'est-à-dire $x \in A \cap B$. Donc $x \in (A \cap B) \cup C$.

     Ainsi, $x \in (A \cap B) \cup C$.