Université Clermont Auvergne
UFR de Mathématiques

L1 mathématiques
Année 2020-2021

U.E. MAAS, portail "Sans Maths" (code Z120BU04)

Groupe LAS portails "Sans Maths", le 27 avril 2021, 10h–11h30

Rédacteur du sujet : Équipe pédagogique MAAS Nb. de pages : 2	Durée de l'épreuve : 1h30. Feuilles de synthèse TCM S1 & MAAS S2 et calculatrices autorisées. Les réponses doivent être justifiées ; La rédaction sera prise en compte dans l'évaluation de la copie.

Exercice 1 [5 points]

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x\sin(xy)$.

1. Calculer les dérivées partielles de f.
2. Déterminer $\overrightarrow{\text{grad}} f(-1;\pi)$.
3. Donner la valeur du réel a telle que le point $(-1;\pi)$ appartienne à la ligne de niveau a, notée L_a.
4. Donner l'équation de la tangente à la ligne de niveau L_a au point $(-1;\pi)$, avec a le réel de la question précédente.
5. Donner l'équation du plan tangent à la surface S représentative de f au point $(-1;\pi;f(-1,\pi))$.

Exercice 2 [6 points]

---

1. Une personne est placée sous perfusion de pénicilline à raison de $0,1$ milligramme de substance par minute. On note $Q(t)$ la quantité de pénicilline présente dans le sang au temps t (en **minutes**).
   On admet qu'il existe un réel λ strictement positif tel que la fonction Q vérifie l'équation différentielle :
   $$Q'(t) = 0{,}1 - \lambda Q(t). \tag{E}$$
   (a) i. Résoudre l'équation homogène associée à (E).
       ii. Trouver une fonction constante, solution particulière de (E).
       iii. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
   (b) Sachant que $Q(0) = 0$, exprimer $Q(t)$ en fonction de λ et t.
   (c) Vérifier que Q est croissante et calculer sa limite en $+\infty$.
   (d) Donner la valeur de λ sachant qu'au bout de 180 minutes, la quantité de pénicilline présente dans le sang est de $\dfrac{0{,}05}{\lambda}$. *On demande dans cette question la valeur exacte de λ.*
2. Résoudre l'équation différentielle linéaire du second ordre suivante : $9y'' - 6y' + y = 0$.

Exercice 3 [9 points]

---

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   a) Expliciter la matrice $B = A + 2I_4$ où I_4 est la matrice identité de taille 4.
   b) Calculer AB.
   c) Déduire de la question précédente que A est inversible et donner explicitement son inverse. *On ne demande PAS de faire ici le calcul direct par l'algorithme du pivot de Gauss.*

2. En utilisant l'algorithme de Gauss, résoudre les deux systèmes ci-dessous, en précisant les solutions et le nombre de solutions pour chacun d'eux.
   On demande d'écrire de façon claire, à chaque étape de l'algorithme du pivot de Gauss, les opérations effectuées.

$$(S_1)\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ -x + z = 2 \\ 5x - 4y + 3z = -4 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ -x + z = 2 \\ 5x - 4y + 3z = 2 \end{cases}$$

Correction de l'examen du 27/04/21

Proposée par Sue Claret, Léo Hahn Lecler, Clément Legrand, Vincent Souveton et Emilien Zabeth

Correction de l'Exercice 1.

1. Les dérivées partielles de f sont les suivantes

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin(xy) + xy\cos(xy) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2\cos(xy).$$

2.
$$\overrightarrow{\text{grad}} f(-1,\pi) = \frac{\partial f}{\partial x}(-1,\pi)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(-1,\pi)\vec{j} = (\sin(-\pi) - \pi\cos(-\pi))\,\vec{i} + \cos(-\pi)\vec{j} = \pi\vec{i} - \vec{j}.$$

3. La ligne de niveau L_a est l'ensemble suivant

$$L_a = \{(x,y); f(x,y) = a\}.$$

On veut déterminer a de tel sorte que $(-1,\pi) \in L_a$ c'est-à-dire tel que $f(-1,\pi) = a$. En particulier,

$$f(-1,\pi) = a \quad \Leftrightarrow \quad -\sin(-\pi) = a \quad \Leftrightarrow \quad a = 0$$

4. La tangente à la courbe L_0 au point $(-1,\pi)$ est donnée par

$$(x+1)(\sin(-\pi) - \pi\cos(-\pi)) + (y-\pi)\cos(-\pi) = 0$$

i.e.

$$\pi(x+1) - (y-\pi) = 0 \quad \text{i.e.} \quad \pi x - y + 2\pi = 0.$$

5. L'équation du plan tangent à la surface S représentative de f au point $(-1,\pi; f(-1,\pi))$ est

$$(x+1)(\sin(-\pi) - \pi\cos(-\pi)) + (y-\pi)\cos(-\pi) - (z + \sin(-\pi)) = 0$$

i.e.

$$\pi(x+1) - (y-\pi) - z = 0 \quad \text{i.e.} \ \pi x - y + 2\pi - z = 0.$$

Correction de l'Exercice 2.

1. (a) i. L'équation homogène associée à l'équation (E) est $Q'(t) + \lambda Q(t) = 0$. Ces solutions sont données par

$$Q_h(t) = Ce^{-\lambda t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

ii. On cherche Q_p une fonction constante solution de (E). En particulier, si Q_p est constante alors $Q'(t) = 0$ et donc Q_p est solution de (E) si et seulement si $\lambda Q(t) = 0.1$. On en déduit donc que $Q(t) = \frac{0.1}{\lambda}$ (qui est constante) est une solution particulière de (E).

iii. Les solutions de l'équation (E) sont donc données par

$$Q(t) = Q_h(t) + Q_p(t) = Ce^{-\lambda t} + \frac{0.1}{\lambda}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

(b) L'objectif de cette question est de trouver la constante C grâce à l'hypothèse supplémentaire $Q(0) = 0$.

$$Q(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Ce^0 + \frac{0.1}{\lambda} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = -\frac{0.1}{\lambda}$$

et donc

$$Q(t) = -\frac{0.1}{\lambda}e^{-\lambda t} + \frac{0.1}{\lambda}.$$

(c) Q est croissante si et seulement si Q' est positive. On calcule donc la dérivée :

$$Q'(t) = \lambda \frac{0.1}{\lambda} e^{-\lambda t} = 0.1 e^{-\lambda t}.$$

La fonction exponentielle étant positive, Q' l'est aussi et donc Q est bien croissante et on a

$$\lim_{t \to +\infty} Q(t) = \frac{0.1}{\lambda}.$$

(d) D'après l'énoncé, on a $Q(180) = \frac{0.05}{\lambda}$ et

$$\begin{aligned} Q(180) = \frac{0.05}{\lambda} \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{0.1}{\lambda} e^{-180\lambda} + \frac{0.1}{\lambda} = \frac{0.05}{\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{0.1}{\lambda} e^{-180\lambda} = -\frac{0.05}{\lambda} \\ &\Leftrightarrow \quad e^{-180\lambda} = \frac{0.05}{0.1} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -180\lambda = \ln(1/2) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -\frac{\ln(1/2)}{180} = \frac{\ln(2)}{180}. \end{aligned}$$

2. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle est $9X^2 - 6X + 1 = 0$. On calcul ensuite le discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 36 = 0.$$

Il y a donc une unique solution à $9X^2 - 6X + 1 = 0$ donnée par

$$\lambda = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}.$$

Ainsi, les solutions de l'équation $9y'' - 6y' + y = 0$ sont données par

$$y(x) = (K_1 + K_2 x) e^{\frac{1}{3}x}, \qquad K_1, K_2 \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'Exercice 3.

1. (a) On calcule

$$B = A + 2I_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) On calcule

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(c) On vient de montrer $AB = 3I_4$ ce qui revient à $\frac{1}{3}AB = I_4$ ou encore $A\left(\frac{1}{3}B\right) = I_4$. Donc en posant $C = \frac{1}{3}B$ on a $AC = I_4$. On en déduit A est inversible et que

$$C = \frac{1}{3}B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

est son inverse.

2. Système (S1):

- On écrit la forme matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & 3 & -4 \end{array}\right)$$

- $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \\ 5 & -4 & 3 & -4 \end{array}\right)$$

- $L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -12 & -9 \end{array}\right)$$

- $L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 6 & -12 & -9 \end{array}\right)$$

- $L_3 \leftarrow L_3 - 6L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- La dernière ligne contient uniquement des 0 donc on peut la supprimer

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

- On repasse à la forme système

$$\begin{cases} x & -2y & +3z & = 1 \\ & y & -2z & = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

- On déduit $y = 2z - \frac{3}{2}$ et

$$x = 1 + 2y - 3z = 1 + 2\left(2z - \frac{3}{2}\right) - 3z = 1 + 4z - 3 - 3z = z - 2.$$

$\boxed{\text{Les solutions sont } \left(z-2, 2z-\tfrac{3}{2}, z\right) \text{ pour } z \in \mathbb{R}\text{. Il y a donc une infinité de solutions.}}$

<u>Système (S2):</u>

- On écrit la forme matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

- $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \\ 5 & -4 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

- $L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -12 & -3 \end{array}\right)$$

- $L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 6 & -12 & -3 \end{array}\right)$$

- $L_3 \leftarrow L_3 - 6L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

- La dernière ligne ne contient que des 0 à gauche du trait vertical alors que l'entrée à droite du trait verticale est non nulle.

  $\boxed{\text{Le système n'a donc pas de solutions.}}$