Notes complémentaires : Equations différentielles linéaires

Vincent Souveton

2022-2023

Au collège et au lycée, on apprend à résoudre des équations dont les inconnues sont des nombres réels ou complexes. Ce chapitre se place dans un cadre différent : il s'agit d'étudier des équations dont l'inconnue n'est pas un nombre, mais une fonction. On parle alors d'équations fonctionnelles. Plus précisément, les équations que nous allons voir font intervenir une fonction à déterminer ainsi que ses dérivées (premières et secondes). On parle d'équations différentielles. Enfin, dans le cadre de ce cours, la relation qui lie la fonction et ses dérivées est toujours linéaire. On parle donc d'équations différentielles linéaires.

L'étude des équations différentielles joue un rôle important en Science. En effet, elles sont très largement utilisées pour modéliser des phénomènes naturels. La fonction inconnue modélise alors une grandeur physique (température, concentration chimique, position, etc.) que l'on sait, grâce à des considérations théoriques voire empiriques, liée à ses dérivées par rapport à une certaine variable (le plus souvent, le temps ou la position). La résolution de l'équation différentielle permet de déterminer l'évolution de cette grandeur en fonction de la variable.

1 Equations d'ordre 1

Soient a un réel et f une fonction continue de la variable réelle à valeurs dans l'ensemble des réels. On veut trouver les fonctions dérivables $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui vérifient, pour tout $t \in \mathbf{R}$:

$$y'(t) + ay(t) = f(t)$$

1.1 Résolution de l'équation

- **Etape 1 :** <u>Les</u> solutions de l'équation homogène (E_0) : $y' + ay = 0$ sont les fonctions de la forme $y_0(t) = K\exp(-at)$, où K parcourt l'ensemble des réels. On dit que l'ensemble des solutions de l'équation homogène a une structure d'espace vectoriel.

  Preuve. − Pour commencer, il est évident que toute fonction de la forme $y_0(t) = K\exp(-at)$ est solution. En effet, dans ce cas, $y_0'(t) = -aK\exp(-at)$ et on a alors, pour tout réel t :

  $$y_0'(t) + ay_0(t) = -aK\exp(-at) + aK\exp(-at) = 0$$

  − Réciproquement, supposons que y_0 soit une solution dérivable de l'équation homogène. On veut montrer qu'il existe une constante $K \in \mathbf{R}$ telle que $y_0(t) = K\exp(-at)$, ce qui revient à prouver que la fonction dérivable définie sur $\mathbf{R}$ par $z(t) = y_0(t)\exp(at)$ est constante. Pour cela, on va montrer que la dérivée de cette fonction est nulle pour tout réel t :

  $$z'(t) = y_0'(t)\exp(at) + ay_0(t)\exp(at) = (y_0'(t) + ay_0(t))\exp(at) = 0 \times \exp(at) = 0$$

  l'avant-dernière égalité résultant du fait que, par définition, la fonction y_0 satisfait l'équation homogène. Ce qui achève la démonstration. □

- **Etape 2 :** On cherche <u>une</u> solution particulière y_p de l'équation complète (E) : $y' + ay = f$. Cette étape se fait soit en "devinant" une fonction qui convient, soit en cherchant une fonction de la même forme que le second membre f, soit en appliquant le principe de superposition, soit en utilisant la méthode de variation de la constante, etc. Quelques une des ces méthodes seront discutées en TD.

- **Etape 3 :** Les solutions de l'équation complète (E) sont les fonctions de la forme $y(t) = K\exp(-at) + y_p(t)$, où K parcourt l'ensemble des réels. On dit que l'ensemble des solutions de l'équation complète a une structure d'espace affine.

  Preuve. – Comme dans la preuve précédente, on vérifie facilement que si une fonction a cette forme, alors elle est solution de l'équation complète.

  – Réciproquement, soit y une solution de l'équation complète et y_p une solution particulière de cette même équation. On veut montrer qu'il est possible d'écrire y comme somme d'une solution de l'équation homogène et de la solution particulière. On remarque d'abord que $y - y_p$ est une solution de l'équation homogène. En effet :

  $$(y - y_p)' + a(y - y_p) = (y' + ay) - (y_p' + ay_p) = f - f = 0$$

  l'avant-dernière égalité résultant du fait que, par définition, les fonctions y et y_p satisfont l'équation complète. Ainsi, on peut écrire y sous la forme voulue en utilisant la décomposition $y = (y - y_p) + y_p$, avec $y - y_p$ solution de l'équation homogène. □

Remarque 1 : Dans bien des situations, on précise aussi une condition initiale sur la fonction inconnue. Par exemple, si l'on souhaite étudier l'évolution de la température dans une pièce au cours du temps, il est commun de préciser la température T_0 au début de l'expérience, c'est à dire quand $t = 0$. Plus généralement, les systèmes de la forme

$$\begin{cases} y'(t) + ay(t) = f(t), \quad \forall t \in \mathbf{R} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

sont appelés des problèmes de Cauchy et ils admettent une unique solution. Pour l'expliciter, on commence par résoudre l'équation habituelle $y' + ay = f$ et, seulement à la fin, on utilise la condition initiale pour trouver l'unique solution qui convient.

Remarque 2 : Les résultats et preuves énoncés dans cette partie se généralisent aisément au cas où a est une fonction, et non pas un réel. Dans ce cas, la chose qui change est que les solutions de l'équation homogène sont de la forme $y_0(t) = K\exp(-A(t))$, où K parcourt l'ensemble des réels et A est une primitive de a.

1.2 Exemples d'applications

Les équations différentielles linéaires d'ordre 1 permettent de modéliser de nombreux phénomènes. Citons par exemple :

1. Dans un circuit électrique RC, la tension u aux bornes du condensateur en réponse à un signal e suit l'équation différentielle suivante :

   $$u'(t) + \frac{1}{RC}u(t) = e(t)$$

2. Pour un corps qui chute dans un champ de pesanteur et soumis à une force de frottement proportionnelle à sa vitesse, la vitesse v obéit à l'équation suivante :

   $$v'(t) = -\frac{\alpha}{m}v(t) - g$$

3. En chimie, dans une réaction d'ordre 1, la vitesse de réaction est proportionnelle à la concentration C du réactif. Autrement dit :

   $$-C'(t) = kC(t)$$

Concentrons-nous sur un autre exemple classique : la désintégration radioactive spontanée d'un échantillon d'une mole de noyaux d'iode 131. Le nombre $N(t)$ de noyaux dans l'échantillon à l'instant t vérifie le système de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} N'(t) + AN(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbf{R}_+ \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

avec $A = 9,90.10^{-7}$ s^{-1} la valeur de la constante radioactive pour l'iode 131 et $N_0 = 6,02.10^{22}$ le nombre de noyaux initialement présents dans l'échantillon. La résolution de ce système (homogène) avec condition initiale donne $N(t) = N_0 \exp(-At)$, pour tout $t > 0$. Le temps de demi-vie, c'est à dire le temps $t_{1/2}$ au bout duquel il reste exactement $N_0/2$ noyaux dans l'échantillon, se détermine facilement en résolvant l'équation suivante :

$$\begin{aligned} N(t_{1/2}) = \frac{N_0}{2} \Longleftrightarrow N_0 \exp(-At_{1/2}) = \frac{N_0}{2} &\Longleftrightarrow \exp(-At_{1/2}) = \frac{1}{2} \\ &\Longleftrightarrow -At_{1/2} = \ln(1/2) \\ &\Longleftrightarrow -At_{1/2} = -\ln(2) \\ &\Longleftrightarrow t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{A} \end{aligned}$$

On peut représenter la situation sous forme graphique en utilisant le script Python suivant :

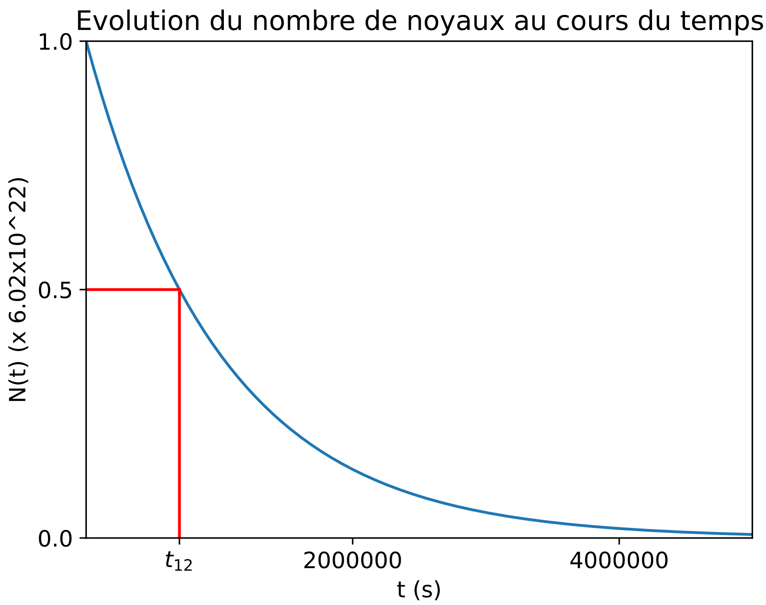
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

A = 9.90e-7
N0 = 1
t12 = np.log(2)/A
stepsize = 1000
Nx = 5000

T = [i*stepsize for i in range(Nx)]
N = [N0*np.exp(-A*t) for t in T]

plt.plot(T,N)
plt.title("Evolution du nombre de noyaux au cours du temps")
plt.xlim(0,T[-1])
plt.xticks([t12,2000000,4000000],labels=['$t_{12}$','2000000','4000000'])
plt.xlabel('t (s)')
plt.ylim(0,1)
plt.yticks([0,0.5,1])
plt.ylabel('N(t) (x 6.02x10^22)')
plt.axhline(y=N0/2,xmin=0.,xmax=t12/T[-1],color='r')
plt.axvline(x=t12,ymin=0.,ymax=N0/2,color='r')
plt.show()
```

En exécutant le script, on visualise nettement la décroissance exponentielle du nombre d'entités dans l'échantillon :



2 Equations d'ordre 2

Soient a, b, c trois réels avec $a \neq 0$. On veut trouver les fonctions deux fois dérivables $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui vérifient, pour tout $t \in \mathbf{R}$:

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

2.1 Résolution de l'équation

- **Etape 1 :** On cherche les solutions (les *racines* dans le jargon algébriste) de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$. Pour cela, on forme le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ et :
  - si $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines réelles $r_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ distinctes ;
  - si $\Delta = 0$, l'équation admet une racine double réelle $r_0 = \dfrac{-b}{2a}$;
  - si $\Delta < 0$, l'équation admet deux racines complexes distinctes $r_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} = u - iv$ et $r_2 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = u + iv$ distinctes, avec $u = \dfrac{-b}{2a}$ et $v = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$.
- **Etape 2 :** Comme pour l'étape précédente, trois cas se présentent alors :
  - si l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, alors <u>les</u> solutions de l'équation sont les fonctions de la forme $y(x) = K_1 \exp(r_1 x) + K_2 \exp(r_2 x)$, où K_1 et K_2 parcourent l'ensemble des réels.
  - si l'équation caractéristique admet une racine double r_0, alors <u>les</u> solutions de l'équation sont les fonctions de la forme $y(x) = (K_1 + K_2 x)\exp(r_0 x)$, où K_1 et K_2 parcourent l'ensemble des réels.
  - si l'équation caractéristique admet deux solutions complexes distinctes $u - iv$ et $u + iv$, alors <u>les</u> solutions de l'équation sont les fonctions de la forme $y(x) = (K_1 \cos(vx) + K_2 \sin(vx))\exp(ux)$, où K_1 et K_2 parcourent l'ensemble des réels.

  On dit que l'espace des solutions est un espace vectoriel de dimension 2.

Preuve. **Partie 1.** Nous allons commencer par traiter le cas complexe, ce qui nous permettra de revenir naturellement vers le cas réel qui nous intéresse. Dans $\mathbf{C}$, l'équation caractéristique admet toujours au moins une racine. Soit r une telle racine. Soit aussi y une fonction deux fois dérivable. Alors, la fonction $z : t \mapsto \exp(-rt)y(t)$ est deux fois dérivable et

$$\begin{aligned} ay''(t) + by'(t) + cy(t) &= \left[a(z''(t) + 2rz'(t) + r^2 z(t)) + b(z'(t) + rz(t)) + cz(t)\right]\exp(rt) \\ &= \left[az''(t) + (2ar + b)z'(t)\right]\exp(rt) \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction y est solution si, et seulement si, z' est solution de l'équation différentielle homogène d'ordre 1 suivante : $af' + (2ar + b)f = 0 \iff f' + \frac{2ar+b}{a} f = 0$, que l'on notera (E_0). Deux cas se présentent :

- Si l'équation caractéristique admet deux racines distinctes r_1 et r_2, alors $r_1 \neq \frac{-b}{2a} \iff 2ar_1 + b \neq 0$. Les solutions de (E_0) sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda \exp(-\frac{1}{a}(2ar_1 + b)t)$, quand λ parcourt l'ensemble des complexes. Ainsi, y est solution de l'équation ssi il existe des constantes $K_1, K_2 \in \mathbf{C}$ telles que $z(t) = K_1 + K_2 \exp(-\frac{1}{a}(2ar_1 + b)t)$, pour tout t, c'est à dire ssi il existe des constantes $K_1, K_2 \in \mathbf{C}$ telles que, pour tout t :

$$\begin{aligned} y(t) &= K_1 \exp(r_1 t) + K_2 \exp\left(-\left(r_1 + \frac{b}{a}\right)t\right) \\ &= K_1 \exp(r_1 t) + K_2 \exp(r_2 t) \end{aligned}$$

- Si l'équation caractéristique admet une racine double r_0, alors $r_0 = \frac{-b}{2a} \iff 2ar_0 + b = 0$. Les solutions de (E_0) sont donc les fonctions $x \mapsto K$, quand λ parcourt l'ensemble des complexes. Ainsi, y est solution de l'équation ssi il existe des constantes $K_1, K_2 \in \mathbf{C}$

telles que $z(t) = K_1+K_2x$, pour tout t, c'est à dire ssi il existe des constantes $K_1, K_2 \in \mathbf{C}$ telles que, pour tout t :

$$y(t) = K_1 \exp(r_0 t) + K_2 x \exp(r_0 t)$$

Résumé de la partie 1 :

- si l'équation caractéristique admet deux racines complexes distinctes r_1 et r_2, alors les solutions sont de la forme : $y(t) = K_1 \exp(r_1 t) + K_2 \exp(r_2 t), \quad K_1, K_2 \in \mathbf{C}$
- si l'équation caractéristique admet une racine double (forcément réelle ici) r_0, alors les solutions sont de la forme : $y(t) = (K_1 + K_2 x) \exp(r_0 t), \quad K_1, K_2 \in \mathbf{C}$

Partie 2. Revenons au cas réel. Trois cas sont à étudier :

- si l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors on reprend la démonstration de la partie 1 pour dire que les solutions sont de la forme :

$$y(t) = K_1 \exp(r_1 t) + K_2 \exp(r_2 t), \quad K_1, K_2 \in \mathbf{R}$$

- si l'équation caractéristique admet une racine double (forcément réelle ici) r_0, alors on reprend la démonstration de la partie 1 pour dire que les solutions sont de la forme :

$$y(t) = (K_1 + K_2 x) \exp(r_0 t), \quad K_1, K_2 \in \mathbf{R}$$

- si l'équation caractéristique n'admet pas de solutions réelles, alors cela signifie qu'elle admet deux solutions distinctes conjuguées $u-iv$ et $u+iv$ dans l'ensemble des complexes.
  * Déjà, remarquons que les résultats de la partie 1 montrent que les fonctions

$$\begin{aligned} C : t &\mapsto \frac{1}{2}(\exp((u+iv)t) + \exp((u-iv)t)) = \exp(ut)\cos(vt) \\ S : t &\mapsto \frac{1}{2i}(\exp((u+iv)t) - \exp((u-iv)t)) = \exp(ut)\sin(vt) \end{aligned}$$

  sont solutions. On prouve facilement que l'espace des solutions est un espace vectoriel, en tant que sous-espace vectoriel des fonctions de la variable réelle à valeurs dans l'ensemble des réels (en effet, la fonction nulle est bien solution de l'équation et pour toutes f, g solutions de l'équation, et $\mu \in \mathbf{R}$, $\mu f + g$ est aussi solution). Ainsi, cet espace est stable par combinaison linéaire. Donc toute fonction de la forme $y(t) = (K_1 \cos(vt) + K_2 \sin(vt)) \exp(ut)$, avec $K_1, K_2 \in \mathbf{R}$, est solution.
  * Réciproquement, soit y une solution réelle de l'équation. Alors, d'après la partie 1, on peut trouver deux complexes K_1 et K_2 tels que, pour tout t :

$$y(t) = K_1 \exp((u+iv)t) + K_2 \exp((u-iv)t)$$

  y étant réelle, elle est égale à sa partie imaginaire. Pour tout t, on a donc :

$$\begin{aligned} &y(t) - \overline{y(t)} = 0 \iff (K_1 - \overline{K_2}) \exp((u+iv)t) + (K_2 - \overline{K_1}) \exp((u-iv)t) = 0 \\ &\iff \left[(K_1 - \overline{K_2})(\cos(vt) + i\sin(vt)) + (K_2 - \overline{K_1}))(\cos(vt) - i\sin(vt))\right] \exp(ut) = 0 \\ &\iff (K_1 - \overline{K_2})(\cos(vt) + i\sin(vt)) + (K_2 - \overline{K_1}))(\cos(vt) - i\sin(vt)) = 0 \end{aligned}$$

  En évaluant en $t = 0$ et en $t = \pi/2v$, on trouve que $K_1 = \overline{K_2}$. Posons $K_1 = a + ib$, avec $a, b \in \mathbf{R}$. On a alors $K_2 = a - ib$. Ainsi, pour tout t :

$$\begin{aligned} y(t) &= (a+ib)(\cos(vt) + i\sin(vt)) \exp(ut) + (a-ib)(\cos(vt) - i\sin(vt)) \exp(ut) \\ &= (2a\cos(vt) - 2b\sin(vt)) \exp(ut) \end{aligned}$$

  donc y est bien de la forme cherchée.

$\square$

Remarque 1 : Comme précédemment, il est possible de contraindre l'ensemble des solutions en ajoutant des conditions initiales. Seulement, cette fois, il en faut deux pour obtenir une unique solution. Par exemple, si on étudie l'évolution de la position au cours du temps, on précisera souvent la position et la vitesse à l'instant $t = 0$. Plus généralement, les systèmes de la forme

$$\begin{cases} ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbf{R} \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = v_0 \end{cases}$$

sont aussi des problèmes de Cauchy et admettent une unique solution.

Remarque 2 : *Mais d'où sort l'équation caractéristique ?* Une idée importante à garder en tête est que l'on peut toujours ramener l'étude des équations différentielles à un système d'ordre 1, en réécrivant l'équation sous forme matricielle. Par exemple, en dimension 2 :

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy = f &\Longleftrightarrow y'' + \frac{b}{a}y' + \frac{c}{a}y = \frac{f}{a} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c/a & -b/a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f/a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow AY + B = Y' \end{aligned}$$

L'étude des solutions de ce système d'équations va dépendre de la nature de la matrice A. On cherche à trouver une base dans laquelle elle est diagonale ou triagonale. Cela revient à chercher les valeurs propres de la matrice puis déterminer les vecteurs propres associés (vous verrez ça en L2). Plus explicitement, les valeurs propres sont les racines de $\det(A - rI_2) = \det \begin{pmatrix} -r & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} - r \end{pmatrix} = r^2 + \dfrac{b}{a}r + \dfrac{c}{a}$, qui sont, pour $a \neq 0$, les racines de... l'équation caractéristique !

Remarque 3 : *Comment faire si le second membre est non nul ?* Si l'on veut résoudre une équation de la forme $ay'' + by' + cy = f$, où f est une fonction continue non nulle, alors on peut généraliser certaines méthodes vues dans la première partie. En particulier, l'espace des solutions a encore une structure d'espace affine et est formé des fonctions deux fois dérivables s'écrivant comme la somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène. Pour trouver une solution particulière, on peut là aussi chercher une solution "évidente", une solution de la même forme que f, appliquer le principe de superposition ou encore utiliser une méthode de variation de la constante : connaissant une base (y_1, y_2) de l'espace des solutions de l'équation homogène, on cherche une solution particulière y_p sous la forme

$$\begin{cases} y_p(t) = K_1(t)y_1(t) + K_2(t)y_2(t) \\ y_p'(t) = K_1(t)y_1'(t) + K_2(t)y_2'(t) \end{cases}$$

2.2 Exemples d'applications

La plupart des équations différentielles décrivant des systèmes issus de la Physique classique sont d'ordre 2. Cela vient du principe fondamental de la dynamique énoncé par Newton : la somme des forces s'exerçant sur le centre d'inertie d'un corps est égale au produit de la masse de ce corps par l'accélération de son centre d'inertie. Or, l'accélération est la dérivée seconde de la position par rapport au temps. En langage mathématique :

$$\sum_i \vec{F_i} = m\vec{a}$$

Développons un exemple bien connu, celui du pendule élastique vertical amorti. On fixe une masse m au bout d'un ressort vertical plongé dans un fluide quelconque. On lâche cette masse d'une hauteur de 3 cm par rapport à la position d'équilibre, avec vitesse initiale nulle. Cette masse est donc soumise à son poids, à la force de rappel élastique ainsi qu'aux frottements du fluide, que l'on suppose proportionnels à la vitesse. Empiriquement, on constate que la masse oscille autour de sa position d'équilibre jusqu'à s'arrêter, freinée par les frottements. Essayons de modéliser mathématiquement cette situation. En notant $x(t)$ l'écart (en cm) à l'équilibre à l'instant t, l'application du principe fondamental de la dynamique donne le problème de Cauchy suivant, avec ses deux conditions initiales :

$$\begin{cases} x''(t) + 2\lambda x'(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbf{R}_+ \\ x(0) = 3 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

Pour les valeurs des constantes, on prendra $\lambda = 0.50$ rad.s^{-1} et $\omega_0^2 = 2.5$ rad^2.s^{-2}. L'unique solution de ce système est la fonction $x(t) = \left(3\cos\left(\frac{3}{2}t\right) + \sin\left(\frac{3}{2}t\right)\right)\exp\left(-\frac{1}{2}t\right)$ définie pour tout réel positif t. On peut la représenter sous forme graphique avec le script Python suivant :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

Nx = 5000

T = np.linspace(0,10,Nx)
X = [(3*np.cos(1.5*t)+np.sin(1.5*t))*np.exp(-0.5*t) for t in T]

plt.figure()
plt.plot(T,X)
plt.title("Evolution de la position au cours du temps")
plt.xlabel('t (s)')
plt.ylabel('x(t)')
plt.show()
```

En exécutant le script, on visualise nettement l'oscillation amortie de la masse autour de sa position d'équilibre. On parle de régime pseudo-périodique :